

Capítol 1

Nombres Reals $\mathbb{R}$

1.1 Nombres que no són Racionals

Qualsevol nombre racional es pot expressar mitjançant un nombre decimal exacte o un nombre decimal periòdic.

Recíprocament, també es verifica que tot nombre decimal exacte o periòdic es pot expressar com un nombre racional.

Tot nombre racional s'expressa de manera única per un nombre decimal que és exacte o periòdic.

Ara bé, tot els nombres decimals han de ser necessàriament exactes o periòdics? Per molt que fraccionem la unitat, segur que podem trobar longituds la mesura de les quals no es podrà expressar mitjançant un nombre racional. Dit d'una altra manera, no tots els nombres decimals són exactes o periòdics i, en conseqüència, no tots els nombres decimals són racionals.

Tot seguit recordem alguns d'aquests nombres.

1.1.1 Relació entre la longitud amb un diàmetre de la circumferència

Sabem que $L = \pi \cdot d$. Per tant, podem escriure:

$$\frac{\text{Longitud de la circumferència}}{\text{Longitud del diàmetre}} = \frac{L}{d} = \pi$$

La longitud de qualsevol circumferència és igual a π multiplicat per la longitud d'un dels seus diàmetres.

Quin és el valor de π ? El que tu coneixes o el que pots obtenir de la calculadors no són més que aproximats al valor real de π .

1.1.2 Relació entre la longitud del costat i la diagonal d'un quadrat

Considerem un quadrat de costat c . Quan hi tracem una de les diagonals, el quadrat queda descompost en dos triangles rectangles iguals.

Apliquem el teorema de Pitàgores a un d'aquests triangles rectangles:

$$d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \implies d = \sqrt{2c^2} = \sqrt{2}\sqrt{c^2} = \sqrt{2}c$$

Es comprova que:

$$\frac{\text{Longitud de la diagonal}}{\text{Longitud del costat}} = \frac{\sqrt{2}c}{c} = \sqrt{2}$$

És a dir, la longitud de la diagonal de qualsevol quadrat és igual a $\sqrt{2}$ multiplicada per la longitud del seu costat. Quin valor obtens a la calculadora per a $\sqrt{2}$? També en aquest cas es tracta d'un valor aproximat.

1.1.3 Relació entre les longituds dels costats d'un rectangle auri

Quina ha de ser la longitud expressada per x per tal que els dos rectangles siguin semblants? Els rectangles seran semblants si els costats corresponents són proporcionals. Per tant, s'ha de verificar:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \longrightarrow x^2 - x = 1 \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolem aquesta equació de segon grau:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \longrightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ i } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

En ser $x_2 < 0$ i tenint en compte que la longitud d'un segment sempre ha de ser positiva, la solució vàlida és x_1 . Per tant la resposta és

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

I fixa't que es verifica la igualtat següent:

$$\frac{\text{Longitud del costat gran}}{\text{Longitud del costat petit}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Els rectangles que compleixen aquesta condició s'anomenen rectangles auri i el quocient entre les longituds dels seus costats, relació àuria o nombre d'or. Habitualment, es representa mitjançant la lletra grega ϕ :

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Les mesures que guardaven aquesta proporció van ser molt utilitzades en l'art clàssic, ja que es considerava que proporcionaven formes particularment harmonioses als objectes. Utilitza la calculadora per trobar un valor aproximat de ϕ .

Exercicis

- (1) Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida a les centèsimes:
 - (a) La diagonal d d'un rectangle de costats 3 i 5cm.
 - (b) El diàmetre d' d'una circumferència de 10cm de longitud.
 - (c) L'altura h d'un triangle equilàter de 4cm de costat.
 - (d) L'altura h' d'un con que mesura 6cm de radi i 9cm de generatriu.
- (2) El costat més petit d'un rectangle auri mesura 2cm. Quant mesura l'altre costat? Expressa'n el resultat de manera exacta i amb una aproximació arrodonida a les dècimes.
- (3) Sabent que els segments $PQ = PS = 1dm$, demostra que el segment QR mesura $\frac{1+\sqrt{5}}{2}dm$.

1.2 Nombres Irracionals

Si els nombres racionals s'expressen mitjançant els nombres decimals exactes o periòdics, hauríem de plantejar-nos com s'expressen els nombres irracionals. Sembla lògic pensar en els nombres decimals il·limitats no periòdics. Efectivament, podem considerar els nombres irracionals com aquells nombres decimals il·limitats les xifres dels quals no formen cap període. Per exemple:

$$1,040\ 040\ 004\ 000\ 04\ \dots \qquad -\ 5,762\ 576\ 255\ 762\ 555\ \dots$$

Vegem, tot seguit, alguns nombres irracionals d'utilització freqüent.

1.2.1 L'arrel quadrada de 2: $\sqrt{2}$

A la calculadora apareix $\sqrt{2} = 1,414213562$.

Tenint en compte que l'última xifra decimal 2 és poc fiable perquè podria estar arrodonida, si el valor de $\sqrt{2}$ fos aquest, ens trobaríem davant d'un nombre racional, ja que es tracta d'un decimal exacte.

Si $\sqrt{2}$ no és racional, significa que darrere de l'última xifra decimal que ens proporciona la calculadora hi ha un nombre il·limitat d'altres xifres que en cap moment formen període.

De fet, si disposéssim d'un ordinador amb un programa adient, podríem conèixer força més xifres decimals de $\sqrt{2}$ i comprovar que no són periòdiques. De tota manera, un ordinador tampoc no ens podria proporcionar totes aquestes xifres decimals i és lícit que ens plantejem el dubte de si en algun moment les xifres decimals de $\sqrt{2}$ acaben repetint-se. L'objectiu és demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional.

Suposem el contrari, és a dir, que $\sqrt{2}$ és racional. Si això és cert, significa que es pot expressar en forma de fracció. Si representem per $\frac{a}{b}$ la seva fracció generatriu irreductible, podem escriure la igualtat següent:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

en què a i b són nombres primers entre ells. Si elevem el quadrat els dos membres de la igualtat, obtenim:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Això significa que hem pogut simplificar la fracció $\frac{a^2}{b^2}$ i hem obtingut com a resultat 2. Si reflexiones un moment, t'adonaràs que aquesta simplificació no hauria de ser possible, ja que si $\frac{a}{b}$ és una fracció irreductible, també ha de ser irreductible la fracció $\frac{a^2}{b^2}$. Arribem doncs, a una contradicció l'origen de la qual es troba en la suposició de partida.

$\sqrt{2}$ no es pot expressar en forma de fracció i, per tant, no és un nombre racional. En conseqüència, podem afirmar que $\sqrt{2}$ té un nombre il·limitat de xifres decimal no periòdiques. És un nombre irracional.

Ja saps que quan operes amb nombres racionals, les sumes, les restes, les multiplicacions, les divisions i fins i tot les potències d'exponent enter donen sempre com a resultat un altre nombre racional. No succeeix el mateix amb les arrels; de fet, les arrels de nombres racionals poques vegades donen com a resultat un altre nombre racional.

D'altra banda, si sumem, restem, multipliquem o dividim un nombre racional amb nombres irracionals obtenim nous nombres irracionals. Aquesta conseqüència també la podríem demostrar per reducció a l'absurd.

1.2.2 El nombre pi π

És el nombre irracional que has utilitzat més. És necessari per calcular longitud d'una circumferència. L'àrea d'un cercle o els volums dels cossos de revolució. Malgrat que a la pràctica considerem normalment $\pi = 3,14$, aquest valor no és més que una aproximació, que sol ser prou vàlida per als càlculs que efectuem de manera habitual. Ara bé, pensa que si π fos 3,14, seria un nombre racional i no és així. Demostrar que π és irracional no és senzill. Tot i que els grecs ja sospitaven la irracionalitat, no va ser fins al segle XVII que s'en va fer la demostració. La calculadora et proporciona una aproximació molt millor al valor del nombre π .

$$\pi = 3,141592654$$

1.2.3 El nombre e

Possiblement sigui un dels nombres més importants en el món científico-tecnològic. Tindràs ocasió de comprovar-ho a mesura que avancis en els teus estudis. En aquest curs l'analitzarem amb detall, però pots obtenir-ne una aproximació prement les tecles $\boxed{1}$ i $\boxed{e^x}$ de la teva calculadora. A la pantalla apareix escrit el següent:

$$e = 2,718281828$$

Exercicis

- (4) Classifica els nombres següents segons si són racionals o irracionals:

- (a) $2,04\overline{5}$ (c) $1,\overline{9}$ (e) $4,3131131113\dots$
 (b) $-3,88080080008\dots$ (d) $\frac{113}{114}$ (f) $0,5\overline{8421}$

(5) Indica quins d'aquests nombres són irracionals:

- (a) $\sqrt{25}$ (d) $5e$ (g) $\sqrt{16+9}$
 (b) $1+\pi$ (e) $3+2\sqrt{49}$ (h) $\sqrt{25+36}$
 (c) $\sqrt{5}+3$ (f) $7\sqrt{5}$ (i) $\sqrt{2(16+9)}$

(6) Perquè el número $\frac{1,\hat{2}+0,25}{0,1\hat{6}}$ no pot ser irracional?

(7) Calcula l'àrea d'un cercle de $4cm$ de radi prenent els valors següents de π :

- (a) L'aproximació per defecte $3,1415$ (b) L'aproximació per excés $3,1416$

En quin dels dos casos has obtingut una millor aproximació a la mesura de la superfície d'aquest cercle? Perquè?

(8) Expressa de manera exacta:

- (a) La longitud d'una circumferència de $6cm$ de diàmetre.
 (b) L'àrea lateral d'un cilindre de $2cm$ de radi i $5cm$ de generatriu.
 (c) El volum d'un con de $5cm$ de radi i $13cm$ de generatriu.

(9) S'ha aconseguit determinar que el radi d'una circumferència mesura cm . Se'n pot conèixer amb exactitud la longitud? I l'àrea del cercle que limita? Justifica la resposta fent els càlculs corresponents.

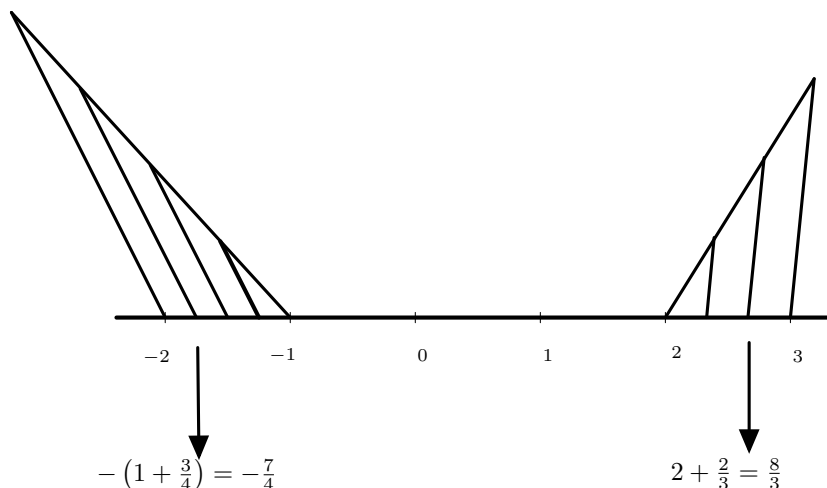
(10) Quant mesura la diagonal d'un cub de $2cm$ d'aresta? Expressa'n el resultat de manera exacta i aproxima'l a les centèsimes.

(11) La longitud d'una circumferència mesura $10\pi cm$.

- (a) Expressa'n el resultat aproximat a les centèsimes.
 (b) Quant mesura el radi d'aquesta circumferència?
 (c) Calcula l'àrea del cercle que limita i expressa-la de manera exacta.

1.3 Representació gràfica de nombres irracionals

Ja saps com es representen els nombres racionals a la recta numèrica:



A cada nombre racional li correspon un punt de la recta. Però també és cert que a cada punta de la recta li correspon un nombre racional? Si fos així, la recta estaria completa i no podríem representar-hi cap nombre irracional.

Entre dos nombres racionals qualssevol hi ha un nombre il·limitat d'altres nombres racionals. Considera, per exemple, el nombre racional que resulta d'efectuar-ne la semi-suma i repeteix el procés amb aquest i amb un dels altres dos. No acabaries mai!

En realitat, els nombres racionals no completen la recta. És més, si poguéssim representar-los, quedarien encara molts punts als quals no correspondria cap racional. En principi, podríem pensar que aquests punts estan reservats per als nombres irracionals.

En general, representar un nombre amb infinites xifres decimals no periòdiques és impossible i, per tant, ens haurem de conformar amb una representació aproximada. De tota manera, hi ha mètodes geomètrics que permeten representar a la recta numèrica alguns nombres irracionals.

Els nombres racionals i els irracionals aconsegueixen omplir tots els punts de la recta

Exemple 1

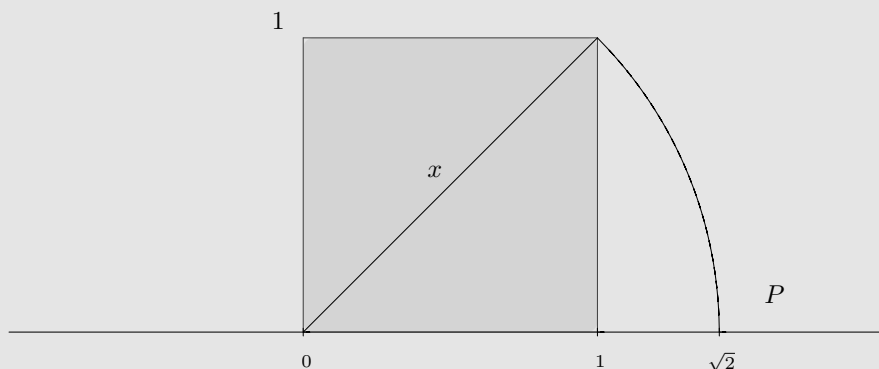
Representa $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{10}$.

Cal tenir clar que $\sqrt{2} = 1,41\dots$, és a dir, que $1 < \sqrt{2} < 2$. Observa la figura. Quant mesura la seva diagonal?

Si apliquem el Teorema de Pitàgores:

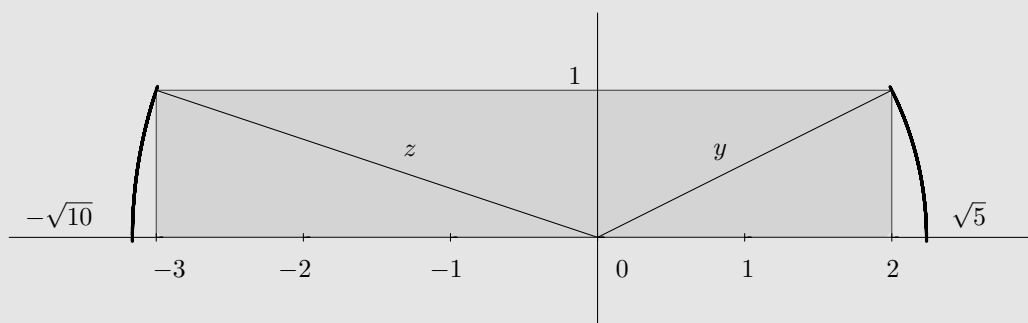
$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \longrightarrow x = \sqrt{2}$$

Amb ajuda d'un compàs podem representar exactament $\sqrt{2}$ a la recta numèrica.



Sabem que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional, per tant, el punt P de la recta no podria estar ocupat per cap nombre racional. Observa com hem representat els nombres irracionals $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{10}$

$$z^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \quad z = \sqrt{10} \quad -4 < \sqrt{10} < -3 \quad y^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad y = \sqrt{5} \quad 2 < \sqrt{5} < 3$$



Exercicis

(12) Troba cinc nombres racionals compresos entre i i i , i ordena'ls de més petit a més gran.

(13) Entre quins nombres enters consecutius es troba cadascun d'aquests nombres irracionals.

(a) $\sqrt{7}$

(b) $-\sqrt{13}$

(14) Representa la recta numèrica els nombres irracionals següents:

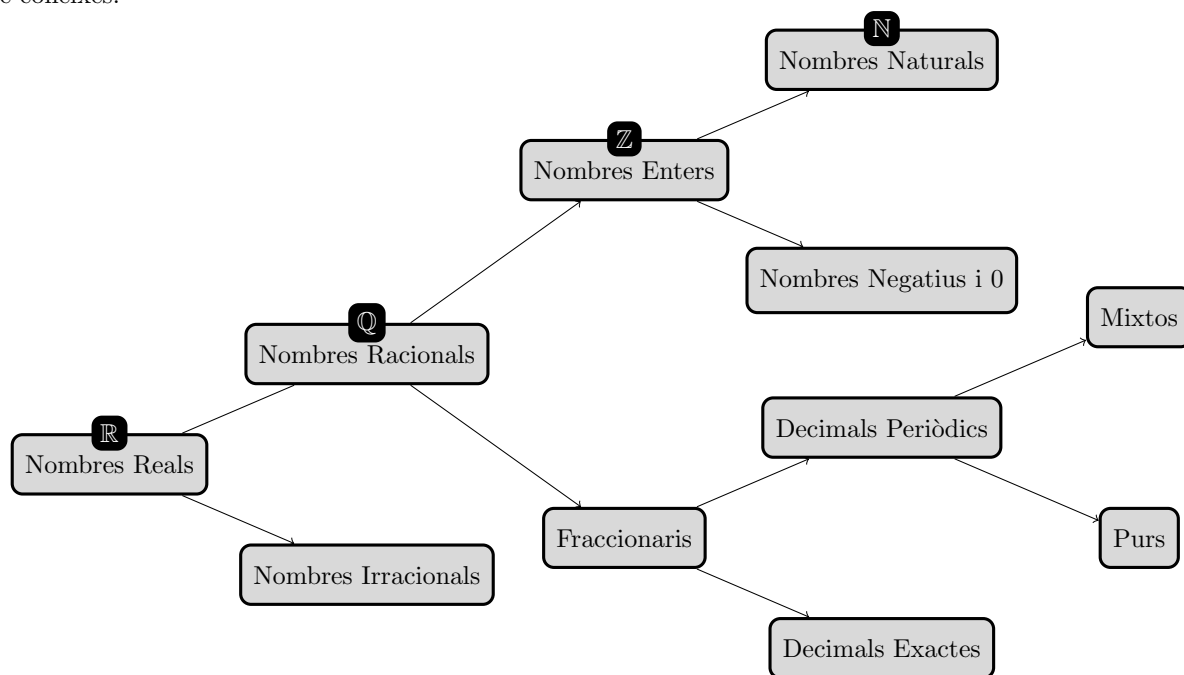
(a) $\sqrt{11}$

(b) $-\sqrt{8}$

1.4 Els nombres Reals: $\mathbb{R}$

El conjunt format pels nombres racionals i els irracionals s'anomena conjunt dels **nombres reals** i es representa amb $\mathbb{R}$. Recorda que els nombres naturals es representa per $\mathbb{N}$, els enters per $\mathbb{Z}$ i els racionals per $\mathbb{Q}$.

Tant els nombres racionals com els irracionals són, doncs, nombres reals. Els nombres reals omplen per complet la recta numèrica. És per aquest motiu que se l'anomena **recta real**. Fixat un origen i definida la unitat, a cada nombre real li correspon un únic punt de la recta, i a cada punt de la recta li correspon un únic nombre real. L'esquema següent t'ajudarà a recordar els diferents conjunts numèrics que coneixes:



El conjunt dels nombres reals és un conjunt ordenat, és a dir, donats dos nombres reals sempre podem saber quin és el més petit. Els nombres reals segueixen el mateix ordre que ha coneixes per als racionals. Hem fet ús d'aquesta propietat quan hem representat en l'apartat anterior alguns nombres irracionals a la recta. Si a i b representen dos nombres reals tals que $a < b$, es compleix que $b - a > 0$.

Cal que tinguis en compte que:

$$\text{Si } a < b \text{ i } b < c \longrightarrow a < c$$

Aquesta propietat es coneix amb el nom de **propietat transitiva** i ens permet ordenar les sèries de nombres reals.

Exercicis

(15) Compara aquests parells de nombres reals:

- (a) $\frac{7}{5}$ i $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{10}}{8}$ i $\frac{\sqrt{10}}{9}$ (g) 4,9 i 5
 (b) π i $\sqrt{10}$ (e) $1 - \sqrt{2}$ i $-0,73$
 (c) $-\sqrt{6}$ i $-\sqrt{7}$ (f) $-1,9$ i -2 (h) $-1,39$ i $-1,4$

(16) Ordena del més petit al més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat que correspongui:

$$2,45 \quad 2,99 \quad 2,9 \quad -\sqrt{2} \quad -1,42 \quad 0 \quad \frac{5}{2}$$

(17) Escriu dos nombres racionals compresos entre:

- (a) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$ (c) 4 i $\sqrt{17}$
 (b) $-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$ (d) e i π

1.5 Operacions amb nombres reals i propietats

Ja saps com es fan les operacions amb els nombres reals que són alhora racionals.

En cas que hi hagi algun nombre irracional, hauríem de treballar amb la quantitat il·limitada de xifres decimals i això és impossible.

En la pràctica, llevat d'algunes situacions particular que comentarem més endavant, les operacions en què intervenen nombres irracionals cal deixar-les indicades. És l'única manera d'expressar-ne exactament el resultat, que la majoria de vegades és un altre nombre irracional.

Així, la longitud d'una circumferència de $3cm$ de radi és:

$$L = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 3cm = 6\pi cm$$

I l'àrea del seu cercle:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3cm)^2 = 9\pi cm^2$$

Ara bé, si el que necessitem és un resultat aproximat, utilitzarem aproximacions decimal de cada nombre irracional.

D'aquesta manera, el que fem en realitat és substituir cada nombre irracional per un de racional que s'hi approximi, per la qual cosa el resultat que n'obtidrem també serà aproximat.

Si es vol, aquesta aproximació es pot millorar: només cal augmentar el nombre de xifres decimals de cada nombre irracional.

Per a l'exemple anterior i amb una aproximació fins a les centèsimes, obtenim els resultats següents:

$$L = 6\pi cm = 18,85cm \quad A = 9\pi = 28,27cm^2$$

Curiosament, algunes operacions amb arrels donen com a resultat un nombre racional. Això succeeix poques vegades, però és important adonar-se'n.

Exemple 2

Efectua les operacions següents i comprova que el resultat és un nombre racional.

- (a) $(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = 7$
 (b) $(6 + \sqrt{5}) + (6 - \sqrt{5}) = 6 + 6 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 12$
 (c) $(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 4^2 - (\sqrt{3})^2 = 16 - 3 = 13$
 (d) $(5\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot \sqrt{2^2} = 25 \cdot 2 = 50$

1.5.1 Propietats

Els nombres racionals també són nombres reals. Per tant, no tindria cap sentit que les operacions amb racionals verifiquessin unes propietats i, en canvi, les mateixes operacions amb reals en verifiquessin unes altres de diferents. Per tant, admetem que les propietats de les operacions amb nombres reals són les mateixes que en el cas dels racionals.

Recordem que per indicar que un número a pertany al conjunt dels nombres reals utilitzem la notació $a \in \mathbb{R}$.

Propietats d'Operacions amb Nombres $\mathbb{R}$

Suma

Si $a, b \in \mathbb{R}$ llavors $a + b \in \mathbb{R}$

- **Associativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Commutativa:** Si $a, b \in \mathbb{R}$
 $a + b = b + a$
- **Existència de l'element neutre 0:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $a + 0 = a$
- **Existència de l'element oposat:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $-a \in \mathbb{R}$ $a + (-a) = 0$
- **Distributiva de la multiplicació respecte de la suma:**
Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, llavors $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Aquesta propietat aplicada de dreta a esquerra, l'anomenem treure factor comú.

Multiplicació

Si $a, b \in \mathbb{R}$ llavors $a \cdot b \in \mathbb{R}$

- **Associativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Commutativa:** Si $a, b \in \mathbb{R}$
 $a \cdot b = b \cdot a$
- **Existència de l'element neutre 1:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $a \cdot 1 = a$
- **Existència de l'element invers:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ i $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Exercicis

(18) Expressa de manera exacta:

- (a) L'àrea d'un triangle equilàter de 4cm de costat
- (b) La longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual mesura 4 i 6cm
- (c) El volum d'un cilindre de 2cm de radi i 3cm d'altura
- (d) L'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de 8cm de diàmetre

(19) Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes cadascun dels nombres irracionals següents:

- (a) $\sqrt{17}$
- (b) e
- (c) π

(20) Extreu factor comú de:

- (a) $3\sqrt{1} + 5\sqrt{2}$
- (b) $4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$
- (c) $7\pi - 3\pi + \pi$
- (d) $\sqrt{5}a + \sqrt{5}b - \sqrt{5}c$

(21) Les aproximacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas:

- (a) $(\sqrt{10})^2$
- (b) $(3\sqrt{7})^2$
- (c) $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3}$
- (d) $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$
- (e) $(7\pi - 2\pi) : 3\pi$
- (f) $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2})} - 11$

(22) Si x, y i z representen quatre nombres reals, escriu cadascuna d'aquestes expressions com un producte de dos factors:

- (a) $x^2y + xy^2$
- (b) $z^3 + z^2 + z$
- (c) $z(x - t) - x^2 + 2xt - t^2$
- (d) $x(y + z) + t(y + z)$
- (e) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y)$

1.6 Les arrels i les potències

Hem de conèixer la següent propietat:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ es llegeix com l'**arrel enèsima** de a , n és un nombre natural que s'anomena índex de l'arrel i a és el radicand.

Observa que:

- Si n és parell, a ha de ser necessàriament un nombre positiu per tal que l'arrel b sigui un nombre real. En aquest cas, hi ha dos resultats possibles que són sempre dos nombres reals oposats.
- Si n és senar, sempre existeix el nombre real b i és únic.

Tal com es defineix la radicació, és possible escriure una arrel en forma de potència i a l'inrevés. Aquestes noves potències hauran de verificar les mateixes propietats que les potències d'exponent enter, ja que coneixes de cursos anteriors. D'acord amb el que acabem de dir, podem escriure:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \text{ perquè } (2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^1 = 2 \\ \sqrt[3]{5} &= 5^{\frac{1}{3}} \text{ perquè } (5^{\frac{1}{3}})^3 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 5^1 = 5 \\ \sqrt[5]{6} &= 6^{\frac{1}{5}} \text{ perquè } (6^{\frac{1}{5}})^5 = 6^{\frac{1}{5} \cdot 5} = 6^1 = 6\end{aligned}$$

En general podem dir que:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ perquè } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

Però si el radicand a està elevat a un exponent m enter, tindrem que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ perquè } (a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

Les potències del tipus $a^{\frac{m}{n}}$ s'anomenen potències d'exponent fraccionari. En definitiva, tota arrel es pot expressar com una potència d'exponent fraccionari i a l'inrevés.

Exemple 3

Expressa aquestes arrels en forma de potències d'exponent fraccionari:

(a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

(e) $\sqrt{2^{-3}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

(b) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

(f) $\sqrt[7]{16} = 16^{\frac{1}{7}} = (2^4)^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{4}{7}}$

(c) $\sqrt[7]{5^3} = 5^{\frac{3}{7}}$

(g) $\sqrt[3]{-6} = -6^{\frac{1}{3}}$

(d) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$

(h) $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$

Exemple 4

Transforma les potències d'exponent fraccionari següents en arrels:

(a) $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}$

(e) $\pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$

(b) $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$

(f) $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$

(c) $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3}$

(g) $3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

(h) $\left(\frac{5}{13}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{13}{5}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{13}{5}}$

Exercicis

(23) Calcula quan puguis els següents radicals:

(a) $\sqrt[3]{1000}$

(c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

(e) $\sqrt[3]{0,001}$

(b) $\sqrt[4]{1296}$

(d) $\sqrt[5]{-1}$

(f) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

(24) Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls.

(a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

(c) $\sqrt{\frac{50}{98}}$

(d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

(25) Expressa en forma de potència:

(a) $\sqrt[3]{7}$

(c) $\sqrt{10}$

(e) $\sqrt[6]{6^5}$

(b) $\sqrt[4]{a^3}$

(d) $\sqrt[5]{(a+2)^2}$

(f) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

(26) Expressa en forma d'arrel:

(a) $b^{\frac{2}{7}}$

(b) $25^{\frac{1}{3}}$

(c) $12^{\frac{1}{4}}$

(d) $a^{\frac{1}{3}}$

(e) $25^{\frac{1}{3}}$

(27) Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:

(a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

(c) $(5^{\frac{1}{3}})^2$

(d) $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

(b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$

(28) Utilitza la calculadora i aproxima fins a les centèsimes aquests nombres irracionals:

(a) $\sqrt[3]{10}$

(c) $\pi^{\frac{1}{4}}$

(e) $5^{\frac{2}{3}}$

(b) $\sqrt[5]{2,76}$

(d) $\sqrt[3]{-50}$

(f) $\sqrt[7]{2^4}$

1.7 Propietats de les arrels

Les propietats que estudiarem a continuació es basen en:

- La possibilitat d'expressar una arrel en forma de potència d'exponent fraccionari.
- Les propietats de les potències d'exponent enter que hem fet extensives a les potències d'exponent fraccionari

1.7.1 Propietat fonamental

Observa la seqüència d'igualtats següents:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}$$

En general podem dir que el resultat d'una arrel no varia si multipliquem o dividim l'índex i l'exponent del radicand per un mateix nombre diferent de zero:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot r}} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}, \text{ amb } r \neq 0$$

D'aquesta manera tenim que:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[10]{a^5} = \dots$$

1.7.2 Arrel d'una multiplicació

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

En general podem dir que l'arrel d'una multiplicació és igual al producte de les arrels dels factors.

$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

1.7.3 Arrel d'una divisió

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$$

En general podem dir que la divisió és igual al quocient de les arrels del dividend i del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

1.7.4 Potència d'una arrel

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$$

En general per tal d'eleva una arrel a una potència, s'eleva el radicand a aquesta potència.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1.7.5 Arrel d'una arrel

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$$

En general, l'arrel d'una arrel dona com a resultat una altra arrel del mateix radicand i d'índex igual al producte dels dos índexs:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Si fem un resum de totes les propietats:

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$, amb $r \neq 0$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Exercicis

(29) Per simplificar una arrel del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, cal aconseguir que m i n siguin nombres primers entre si. Simplifica:

(a) $\sqrt[12]{a^{10}}$

(c) $\sqrt[15]{3^{10}}$

(b) $\sqrt[3]{a^{12}}$

(d) $\sqrt[4]{64}$

(30) Quina de les igualtats següents és incorrecta?

(a) $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$

(b) $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$

(c) $\sqrt{a^2-2ab+b^2} = a-b$

(31) Expressa en forma d'una sola arrel:

(a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

(e) $\left(\sqrt[7]{2^3}\right)^4$

(i) $\sqrt{\sqrt{13}}$

(b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

(f) $3^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

(j) $\sqrt{a \sqrt[3]{a^2}}$

(c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$

(g) $(a+b)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a-b}$

(d) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$

(h) $2\sqrt{5}$

1.8 Operacions amb arrels

Malgrat que la majoria d'operacions amb arrels dona com a resultat una altra arrel que gairebé sempre és un nombre irracional i, pertant, només el podem expressar de manera exacta si el deixem indicat, hi ha alguns casos en què cal anar una mica més lluny per tal d'expressar-ne el resultat d'una manera més senzilla. Vegem-los tot seguit.

1.8.1 Sumes i restes

Si el resultat és $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, no podem fer res més. Ja saps que, com a molt, podem dobar-ne una aproximació.

Ara bé, si el resultat és $3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$, si que es pot expressar de manera més senzilla.

Només cal extreure el factor comú $\sqrt{3}$:

$$3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 - 1 + 2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Ès possible que el factor comú que necessitem no sempre sigui tan evident com en el cas anterior.

Si descomponem el radicand en factors i apliquem les propietats que ja coneixem, el podem localitzar. Fixa't en l'exemple:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - \sqrt{125} &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = \\ &= 2\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (2 + 6 - 5)\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

1.8.2 Multiplicacions i divisions

Per multiplicar i dividir arrels que tenen el mateix índex. És possible fer-ho si els índexs són diferents? Imagina't que el resultat d'una operació sigui $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$. Vegem com es pot expressar de manera més senzilla utilitzant una única arrel.

Cal aconseguir que les arrels que s'han de multiplicar tinguin el mateix índex. Si les expressem en forma de potència i busquem fraccions equivalents d'igual denominador per als exponents, tindrem el problema resolt. Aplicant directament al propietat fonamental dels radicals, ens estalviem el pas previ a potències:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}$$

Si es tracta d'una divisió, el procés que hem de seguir és semblant:

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{12}}}{5^{\frac{4}{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{5^4}} = \sqrt[12]{\frac{8}{625}}$$

Exercicis

(32) Expressa de la forma més senzilla:

(a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$

(c) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

(b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

(d) $\frac{\sqrt{7}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

1.9 Racionalització de denominadors

És possible que alguna vegada et trobis amb expressions fraccionàries que tenen arrels en el denominador. Aquí en tens dos exemples:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{3 - \sqrt{2}}$$

Com pots veure, són dos nombres irracionals i, per tant, no en podem conèixer el valor exacte. De tota manera, si el que volem és fer-hi operacions, seria molt més senzill si per a cada expressió fraccionària poguéssim trobar-ne una d'equivalent sense arrels en el denominador.

A més, per sumar i restar fraccions, és necessari que els seus denominadors siguin nombres naturals per poder-ne calcular el m.c.m. Ja saps com obtenir fraccions equivalents a una fracció donada: multiplicar-ne el numerador i el denominador per un mateix nombre diferent de zero. El problema és esbrinar en cada situació quin és aquest nombre que ens permet eliminar les arrels del denominador.

El procés que se segueix per eliminar les arrels del denominador de les expressions fraccionàries es coneix amb el nom de racionalització de denominadors.

Els dos exemples que acabem de citar pertanyen alt tipus d'expressions fraccionàries que et trobaràs més sovint. Observa com procedim en cada cas.

Exemple 5

Racionalitzem l'expressió fraccionària següent: $\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt{3}$:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Exemple 6

Racionalitzem l'expressió fraccionària següent: $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$.

Multipliquem el numerador i el denominador pel **conjugat** del que tenim al denominador, $3 + \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

Per tant, podem dir que

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

Exercicis

(33) Racionalitza les expressions fraccionàries que apareixen a continuació:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(b) $\frac{12}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

(d) $\frac{22}{4 - \sqrt{5}}$

(34) Efectua les operacions indicades racionalitzant prèviament cada expressió fraccionària:

(a) $\frac{1}{5 + \sqrt{3}} - \frac{2}{5 - \sqrt{3}}$

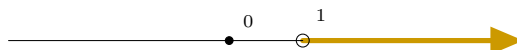
(b) $\frac{7}{4 + \sqrt{2}} - \frac{6}{4 - \sqrt{2}}$

1.10 Les solucions d'inequacions i la recta real

Quines són les solucions de la inequació $2x + 3 > 5$?

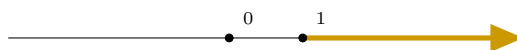
$$2x + 3 > 5 \implies 2x > 5 - 3 \implies 2x > 2 \implies x > 1$$

La resposta és: tots els nombres reals més grans que 1. Els nombres reals més grans que 1, l'1 no hi és inclòs, determinen un conjunt de punts anomenat semirecta oberta i que es designa per $(1, +\infty)$.



La inequació $2x + 3 > 5$ té per solució $x \geq 1$.

Els nombres reals més grans o iguals que 1, determinen un conjunt de punts anomenat semirecta tancada i que es designa per $[1, +\infty)$.



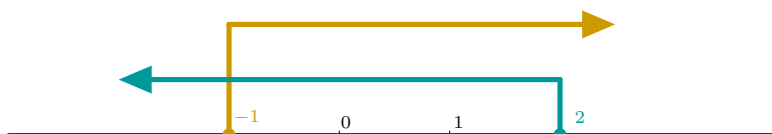
Si ara mostrem la semirecta oberta $(-\infty, -2)$ i la semirecta tancada $(-\infty, -2]$ Obtenim aquests dos gràfics



Les inequacions $x > -1$ i $x < 2$ tenen solucions comunes. Si observem la següent figura, comprovaràs que són tots els nombres reals compresos entre -1 i 2 , ni el -1 ni el 2 hi són inclosos. Aquests nombres determinen un conjunt de punts que es coneix amb el nom de **segment** o **interval obert** i que es designa per $(-1, 2)$.

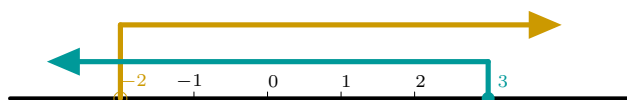


Les solucions comunes a les inequacions $x \geq -1$ i $x \leq 2$ són tots els nombres reals compresos entre -1 i 2 , ambdós inclosos. Determinen sobre la recta un conjunt de punts que rep el nom de **segment** o **interval tancat** i que s'expressa per $[-1, 2]$.

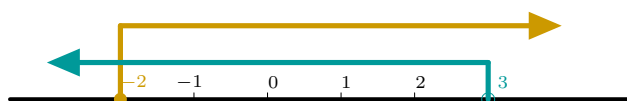


També podem tenir combinacions, és a dir, intervals semioberts o semitancats. Fixa't en els següents exemples.

$-2 < x \leq 3$ s'expressa per $(-2, 3]$ No s'inclou el -2 , però sí el 3 .



$-2 \leq x < 3$ s'expressa per $[-2, 3)$ Inclou el -2 , però no el 3 .



Exercicis

(35) Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Després, defineix-lo mitjançant desigualtats:

- | | | | |
|--------------------|---------------|--------------------|-------------------|
| (a) $[4, +\infty)$ | (d) $(2, 5)$ | (g) $[5, +\infty)$ | (j) $[-5, 8)$ |
| (b) $(-\infty, 5)$ | (e) $[-3, 0)$ | (h) $[-2, 2)$ | (k) $(-3, 4)$ |
| (c) $[1, +\infty)$ | (f) $(0, 3]$ | (i) $(-4, 2]$ | (l) $(-1, -0, 5]$ |

(36) Expressa utilitzant la nova notació els conjunts de nombres reals que verifiquen:

- | | | |
|-------------------------|----------------------|----------------|
| (a) $-3 < x < 6$ | (c) $-5 \leq x < 10$ | (e) $x \geq 1$ |
| (b) $-4 \leq x \leq -1$ | (d) $-7 < x \leq -3$ | (f) $x < -3$ |

1.11 Notació científica

El treball científic obliga a utilitzar amb freqüència nombres que són molt grans o molt petits. L'escriptura d'aquests nombres resulta feixuga i pot provocar nombrosos errors. La notació científica permet expressar-los de manera més senzilla, i facilita al mateix temps les operacions que s'hi realitzen. Aquesta notació consisteix a escriure tot nombre x no nul de la forma següent:

$$x = m \cdot 10^n \quad 1 \leq m < 10 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{Z}$$

on m s'anomena mantissa i n exponent.

Exemple 7

Escriu amb notació científica els nombres següents:

- (a) $0,000\,000\,008\,7 = 8,7 \cdot 10^{-9}$ (c) $345\,500\,000\,000\,000\,000 = 3,455 \cdot 10^{17}$
 (b) $6\,250\,000\,000\,000 = 6,25 \cdot 10^{12}$ (d) $0,000\,000\,000\,000\,05 = 5 \cdot 10^{-14}$

Exercicis

(37) Escriu en notació científica els següents nombres:

- (a) $0,00345 \cdot 10^8$ (d) $756\,423\,987$ (f) La població mundial
 (b) $126,78 \cdot 10^{-5}$ (e) La distància de la Terra al
 (c) $\frac{13}{5789680}$ Sol

(38) Efectua aquestes operacions amb l'ajuda de la calculadora. Expressa'n els resultats utilitzant la notació científica.

- (a) $2,5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6,25 \cdot 10^3$ (c) $\frac{1,25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}$
 (b) $(10^6 : 4 \cdot 10^{-3}) : (5 \cdot 10^7)$ (d) $(10^{-14} - 10^{-14})^2$

(39) Una estrella es troba a 4 anys llum de la Terra. Quina es la distància en quilòmetres que la separa del nostre planeta? Un any llum és la distància que recorre la llum en un any a una velocitat de $300\,000 \frac{km}{s}$

(40) Sabent que un mol d'àtoms de ferro són $6,023 \cdot 10^{23}$ àtoms d'aquest metall i que té una massa de $55,8g$, esbrina:

- (a) La massa en grams d'un àtom de ferro
 (b) El nombre d'àtoms continguts en $1g$ de ferro

(41) Expressa en notació científica la longitud en metres del radi de la Terra, sabent que un quadrat d'un meridià terrestre mesura $10^4 km$.

(42) Demostra, sense utilitzar la calculadora, que el número $\sqrt{1764}$ és racional. Realitza prèviament la descomposició en factors primers de 1764.

(43) Calcula el costat, el perímetre i l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de $2cm$ de radi. Quina de les tres mesures s'expressa mitjançant un nombre racional? Expressa les altres dues de manera exacta i amb una aproximació que arribi fins a les centèsimes.

(44) Dibuixa un quadrat de $2cm$ de costat. Determina els punts mitjans dels seus costats i uneix-los successivament. Quina figura n'obtiens? Per què? Calcula'n l'àrea i el perímetre.

(45) Quina condició han de verificar els coeficients a , b i c de l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, per tal que les seves solucions siguin nombres reals?

(46) El perímetre d'un rectangle mesura 16cm i una de les seves diagonals, $2\sqrt{10}\text{cm}$. Calcula'n l'àrea.

(47) Troba quatre nombres racionals que estiguin compresos entre $2 + \sqrt{5}$ i $2 + \sqrt{6}$.

(48) Representa a la recta numèrica els nombres reals següents:

(a) $\frac{3}{4}$

(b) $1,1\hat{6}$

(c) $\sqrt{34}$

(d) $-\sqrt{8}$

(49) Calcula

(a) $(3\sqrt{5})^2$

(d) $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$

(g) $(3 - \sqrt{3})^2$

(b) $(\sqrt{10})^4$

(e) $(1 + \sqrt{2})^2$

(c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

(f) $(2\sqrt{5} + 1)^2$

(h) $(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

(50) En quins casos el resultat d'una potència de base 3 és més petit que 3? Justifica la teva resposta amb exemples.

(51) Expressa com una sola potència:

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

(b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt[7]{a^2}$

(d) $(\sqrt[4]{b^3})^2$

(52) L'arrel quadrada de l'arrel cúbica d'un nombre positiu x té dos possibles resultats. Per què? Si un d'aquests és 2, quin és l'altre? Calcula x .

(53) Calcula

(a) $\frac{200}{450}$

(b) $\frac{3}{27}$

(c) $\frac{242}{338}$

(54) Calcula

(a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}}$

(b) $7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5}$

(c) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}}$

(d) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{13}$

(55) Indica quines de les igualtats següents no són certes

(a) $\sqrt{9+25} = 3+5$

(b) $\sqrt{7 \cdot 6} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(d) $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{3}$

(56) Justifica aquestes igualtats:

(a) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

(b) $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

(d) $a^2 \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$

(57) Expressa de la manera més senzilla possible el resultat de les operacions següents:

(a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

(c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

(b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$

(d) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$

(58) Racionalitza:

(a) $\frac{20}{\sqrt{10}}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

(c) $\frac{6 + \sqrt{6}}{6 - \sqrt{6}}$

(59) Les solucions d'una inequació es troben a l'interval $[-5, 2)$, i les d'una altra inequació, a l'interval $[0, 4)$. Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.

(60) Digues de manera raonada, si les afirmacions següents són certes o falses.

(a) $\sqrt[3]{-343}$ és un nombre racional.

(b) El nombre real $\frac{2+\pi}{5}$ està comprès entre els nombres naturals 1 i 2.

(c) -4 és un nombre racional.

(d) El resultat de $\sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75}$ és 0.

(61) Expressa de manera exacta:

(a) El volum d'un cub de 3cm de diagonal.

(b) L'àrea lateral d'un con amb una base de 5cm de radi i de 12cm d'altura.

(c) El radi d'una esfera de 27cm^3 de volum.

(d) La hipotenusa d'un triangle rectangle en el qual un dels catets mesura el doble que l'altre.

(62) Expressa en forma d'una sola arrel:

(a) $\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[7]{b^2}$

(b) $\frac{3}{\sqrt[3]{y^2}}$

(c) $(p\sqrt[4]{p^3})^5$

(d) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}$

(63) Calcula i expressa de la manera més senzilla possible:

(a) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 7\sqrt{3})$

(c) $(5 + 2\sqrt{7}) - (5 - 2\sqrt{7})$

(b) $3\sqrt{75} - \sqrt{300} + \frac{1}{2}\sqrt{12}$

(d) $\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

(64) Fes les operacions indicades, racionalitzant prèviament les expressions fraccionàries:

(a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} - \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

(b) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{32}} \right)$