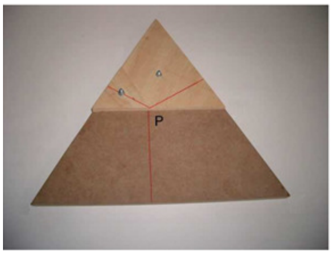
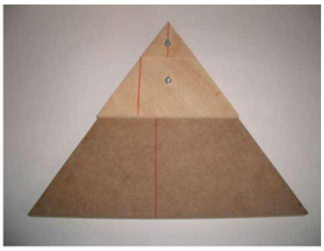
Proposta d'activitat

Títol: Descobrim el teorema de Viviani

Imatge:





Agrupament:

Sembla aconsellable de fer individualment l'exploració i descoberta inicial (així cada alumne assumeix personalment la regularitat que s'observa) amb una posada en comú final. L'exploració en nous triangles equilàters (sobre paper i amb GeoGebra) es pot fer en parella per tal de verbalitzar les accions que es porten a terme i consolidar la descoberta a través de l'intercanvi d'opinions. La demostració final es farà conjuntament.

Material:

Regles graduats, escaires i compassos. Fotocòpies d'un full amb un triangle equilàter. Model en fusta o cartró ploma per fer una demostració visual del teorema de Viviani (vegis la imatge). També caldrà disposar de GeoGebra.

Descripció:

L'activitat comença lliurant a cada alumne un fotocòpia d'un full on apareix simplement un triangle equilàter i demanant que cadascú assenyali el punt que vulgui en el seu interior. Tot seguit convidem l'alumnat a què, emprant el regle i el compàs o l'escaire, tracin les rectes perpendiculars des del punt escollit a cada costat. Cal insistir en què facin aquesta operació amb molta cura, repassant si cal el mètode de construcció. Després es demana que mesurin les distàncies des del punt escollit a cadascun dels costats (el traçat previ de les perpendiculars ajudarà a què aquest amidament sigui més precís). Com que tothom ha escollit el punt que ha volgut, les mesures que s'obtinguin seran diverses.

A continuació els demanem que sumin les tres distàncies i que indiquin el valor que han obtingut. Aquí sorgeix la sorpresa: tothom obté el mateix resultat malgrat que han escollit diferents punts! Cal remarcar que és possible que hi hagin petites diferències degudes a la precisió de les mesures fetes amb el regle graduat.

De manera natural sorgirà una pregunta: El nombre que tothom ha obtingut té alguna propietat especial? Està relacionat amb algun element del triangle? Així s'obre una nova oportunitat de recerca a classe. Els alumnes prenen mesures. El més natural és mesurar el costat i no s'hi veu coincidència. Finalment algú amida l'altura del triangle (novament caldrà tenir cura en el traçat de la perpendicular) i observa amb sorpresa que la longitud de l'altura coincideix amb la suma de les tres distàncies que havíem obtingut. Tothom ho va provant i la descoberta es comparteix.

A partir d'aquí sorgeix una nova pregunta: Això passa per aquest triangle equilàter concret o es compleix per a tots els triangles equilàters? Caldrà investigar!

Formant parelles convidem als alumnes a què construeixin els seus propis triangles equilàters, escullin un punt interior, calculin les tres distàncies als costats, les sumin i comprovin que el resultat obtingut és igual a l'altura del triangle. Les operacions de suma de distàncies i de comparació amb l'altura no cal fer-les emprant el regle graduat: es pot traçar una recta i sobre ella, amb l'ajut d'un compàs, traslladar-hi, de manera consecutiva, els tres segments que van perpendicularment des del punt escollit als costats. Així, conjuntament, s'obtindrà un segment la longitud del qual serà la suma de les tres distàncies. Després, amb el compàs, "agafarem" l'altura del triangle i la superposarem al segment anterior tot observant que la longitud coincideix. És una manera gràfica de fer aquestes comprovacions, sense necessitat de prendre mesures.

Així s'anirà observant que la propietat descoberta per aquell triangle concret del full fotocopiat inicial també es compleix per als diversos triangles equilàters que ens puguem inventar. És interessant reforçar aquesta idea fent el mateix amb GeoGebra. La construcció és fàcil i instructiva i poden emprar-se les eines de mesura del programa per comprovar la igualtat movent el punt escollit o canviant el triangle equilàter. En aquest moment la descoberta està consolidada!

Per tal de perfilar bé la regularitat observada demanarem que cada parella escrigui en un paper, de la manera més clara possible, el que s'ha descobert (no pas el procés que s'ha fet) i ho compartirem. Aquesta posada en comú ajudarà a aclarir la idea, la terminologia emprada i la lògica del text per tal que descrigui adequadament el que es vol expressar. Comparant i polint, probablement s'acabarà obtenint una frase del tipus:

> *En qualsevol triangle equilàter la suma de les distàncies des d'un punt interior a cadascun dels seus costats és sempre igual a l'altura del triangle.*

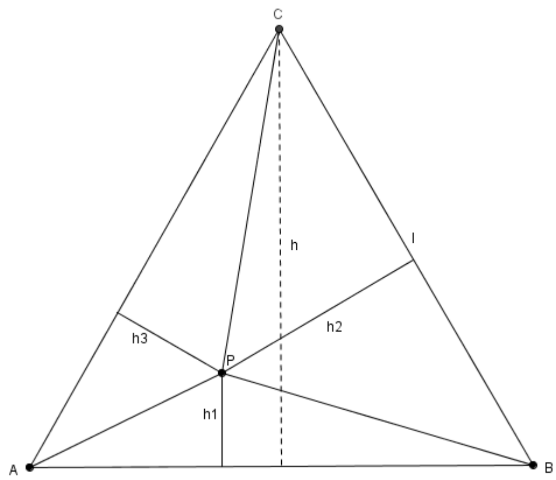
Així enunciem en una text curt i compartit el nostre descobriment!

Tanmateix el fet que una propietat es compleixi en molts casos particulars no vol dir que sigui certa. Fins ara la nostra descoberta és una conjectura! Tan sols arribarà a ser un teorema si l'aconseguim demostrar!

A aquestes alçades de l'activitat, entre l'alumnat, probablement, hi haurà interès en demostrar la propietat que acaben de descobrir. Es pot optar per dues possibilitats:

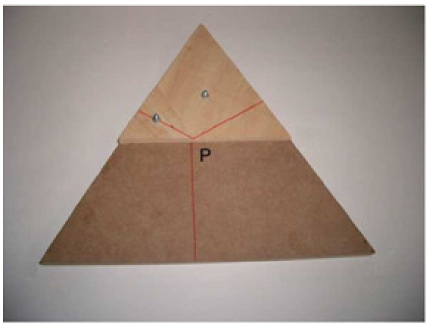
1. Una demostració de caire més algebraic basada en establir una igualtat entre àrees. Anomenant A, B i C als vèrtexs del triangle i P al punt interior, és evident que l'àrea del triangle ABC coincideix amb la suma de les àrees dels triangles APB, BPC i CPA. Anomenem h i l a l'altura i al costat, respectivament, del triangle equilàter i h_1, h_2 i h_3 a les altures respectives dels triangles APB, BPC i CPA que passen del punt P i cauen sobre els corresponents costats. Igualant àrees tindrem:

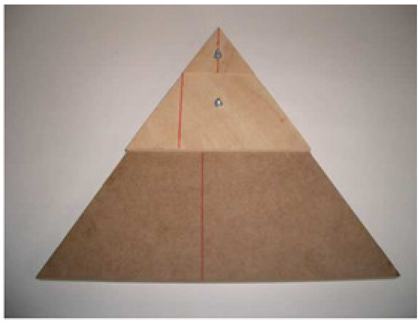
$$\frac{1}{2}l \cdot h = \frac{1}{2}l \cdot h_1 + \frac{1}{2}l \cdot h_2 + \frac{1}{2}l \cdot h_3$$



Simplificant $\frac{1}{2}l$ obtindrem la igualtat $h = h_1 + h_2 + h_3$. Tenint en compte que h_1 , h_2 i h_3 són les distàncies del punt P als tres costats, la propietat queda demostrada.

2. Una bonica demostració visual basada en un material manipulable format per tres triangles equilàters instal·lats un sobre l'altre de manera que, a través de dos girs, les tres distàncies "recobreixen" exactament l'altura del triangle gran tal com descriuen les imatges:





Aquesta proposta es pot consultar a l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum): http://apliense.xtec.cat/arc/node/1282. El magnífic model que apareix a les imatges va ser construït pel professor Quim Tarradas.

Un cop feta la demostració la nostra descoberta ha deixat de ser una conjectura i s'ha convertit en un teorema! De fet, a part de ser el nostre teorema, és el Teorema de Viviani que porta aquest nom en honor al seu primer descobridor, Vincenzo Viviani (Florència, 1622 – Florència, 1703), un deixeble de Galileu.

Al llarg d'aquesta activitat s'ha fet un camí on es veuen clares les etapes d'**experimentació**, de **descoberta**, de **conceptuació** i de **demostració**. Més enllà del valor conceptual del teorema de Viviani, la verdadera riquesa d'aquesta activitat està en aquest camí, en l'experiència viscuda pels alumnes construint idees geomètriques en primera persona.

Una possible ampliació d'aquesta exploració podria partir de noves preguntes: També es compliria aquesta propietat si prenem el punt sobre algun dels costats o algun dels vèrtexs del triangle? Es podria formular una propietat semblant per a un triangle isòsceles on els costats iguals fossin el doble de llargs que el costat diferent? Es podria pensar en una generalització a tres dimensions per a tetraedres regulars?... Aquestes preguntes impulsaran noves experimentacions (en les quals el GeoGebra ens pot ser molt útil!), noves descobertes i, si cal, noves demostracions.

Continguts més rellevants que es tracten:

Geometria del triangle. Teorema de Viviani. Construccions geomètriques amb regle, compàs i escaire i amb GeoGebra. Aspectes de metodologia matemàtica: conjectures i teoremes, comprovacions i demostracions.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta d'activitat permet treballar especialment la competència 4 de la dimensió de resolució de problemes (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes), la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) i la competència 11 de la dimensió de comunicació i representació (Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques). L'ús del Geogebra pot contribuir a desenvolupar la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

El teorema de Viviani està força absent en l'educació matemàtica malgrat expressar un resultat ben sorprenent que posa en joc elements senzills d'un triangle com són l'altura i les distàncies des d'un punt interior als costats. Probablement sigui degut a què, a diferència de teoremes com el de Pitàgores o el de Tales, no és imprescindible per fonamentar altres resultats i, per a un estudiant de secundària, té un limitat interès pràctic. Tanmateix té un innegable interès educatiu en oferir una excel·lent oportunitat per a què els alumnes facin un procés geomètricament ric d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, manejant idees ben al seu abast.

En aquest procés també s'haurà transmès als alumnes una idea clau per entendre la construcció del coneixement matemàtic: la diferència entre una conjectura, resultat de comprovacions experimentals concretes, i un resultat demostrat en general. És una idea tan subtil com rellevant!

En un dels "*Desafíos matemáticos*" que es varen plantejar en el diari *El País* en ocasió del centenari de la Real Sociedad Matemática Española es va proposar una aplicació contextualitzada del Teorema de Viviani. El problema va ser presentat i resolt pel professor David Obrador a través de dos vídeos que poden ser útils a classe i que es poden consultar al web: http://goo.gl/Uj2xWH .