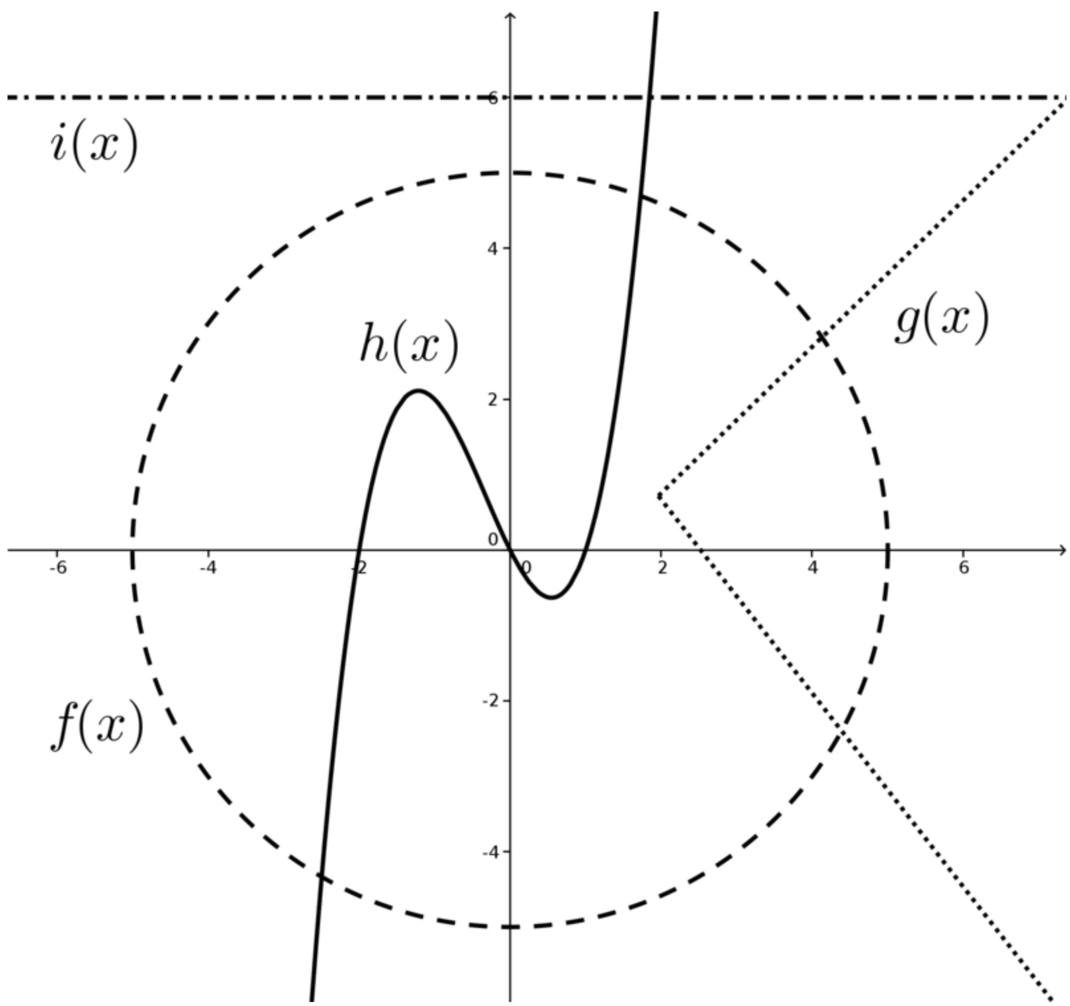
Matemàtiques
3^r d'ESO



IES Miquel Biada

Departament de Ciències

1 de Setembre de 2016

Índex

Capítol 1

Polinomis

1.1 Monomis

S'anomena **monomi** l'expressió algèbrica resultant de multiplicar diversos termes algèbrics, com per exemple:

$\boxed{a \cdot b = ab}$ $\boxed{x \cdot x \cdot y = x^2 y}$ $\boxed{p{\cdot}q{\cdot}q{\cdot}q{\cdot}r = pq^3 r}$

Un monomi pot tenir també un nombre multiplicat, **el coeficient**. El coeficient s'acostuma a escriure al principi del monomi.

$$2 \cdot a \cdot b = 2ab \qquad 15 \cdot x \cdot x \cdot y = 15x^2 y \qquad 5p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot r = 5pq^3 r$$

S'anomena **grau** d'un monomi a la suma de potències de tots els termes algèbrics del monomi. Per exemple, el grau de $3x^2y^3$ és 5.

1.1.1 Suma de Monomis

Només es poden sumar o restar aquells monomis que tenen els mateixos termes algèbrics (les mateixes lletres). En aquest cas es conserven els termes algèbrics i es sumen o resten els nombres dels monomis.

Exemple 1

$3x^2 - 2x + 4x^2 + 3x = 7x^2 + x \qquad 3pqr - 2pqr + 5pqr = 6pqr$

$5x^4 + 12x^4 = 17x^4 \qquad (2x^3 - 7x + 9) - (4x^3 + 2x^2 + 5x - 1) = -2x^3 - 2x^2 - 12x + 10$

Simplifica, calcula tant com puguis les següents sumes de monomis i digues el grau de cada monomi:

(1) $4x^2 + 3yx - 5xy - 6x^2$

(2) $5x + 2y - 2x$

(3) $3x^2 - 12x^2 - 4x^2 + 8x^2$

(4) $7y + 2y$

(5) $2x - 7x$

(6) $9a - 12a$

(7) $2r + 7r + 3r$

(8) $9x - 3x + y$

(9) $4x^3yz - 3xy^2 - 4xy^2$

(10) $7x^3yz - 7x^3yz + xyz$

(11) $2x^2y - 7x^2y$

(12) $4xyz + 8xyz - 5xyz$

(13) $9a^3b - 3a^3b$

(14) $2a - b + 2c + 7d - 6a - 3b + 5c - 3b + 5a + 2b$

(15) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 + 4x^2 + 3x^4$

(16) $3x^2 - 5x^2 + 2x^2$

(17) $4a^3b - 3a^3b + 5a^3b$

(18) $7ab^2 + 4ab^2$

(19) $3x^2 + 3x^2 + 3x^2$

(20) $x^2 - 4x^3 + 2x - 3x^3 + 5x^2 + 8x$

(21) $x^4 - 3x^2 + 3x^4 + 3x^2 - 8x^4$

(22) $x^3 - 4x^3 - 2x + 4x + 3x - x^3$

(23) $x^2 + 8 - 3x^2 - 7 - 5 - 9 + 5x^2$

(24) $x^5 - 2x^2 + 4x^5 + x^2 - 3x^5 + x^2$

(25) $3a + 4b - 5a + 3a - 9b - 3b$

(26) $4a + 3b + 3b + 4b + 5a + 2a$

(27) $-5a - 3b + 2a - 7b + 2a - 3a + 6b$

(28) $x^3 - 5x^3 - 2x^3 + x - 3x - 5x^3$

1.1.2 Multiplicació de Monomis

Per multiplicar monomis, només cal descomposar els monomis en els seus termes algèbrics, i fer el monomi resultant de multiplicar tots els termes. El coeficient de nou monomi és la multiplicació dels coeficients:

$$xy^2 \cdot 2x \cdot 3y^3 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 6x^2y^5 \qquad 3x^4 \cdot 5x^7 = 3 \cdot 5 \cdot x^{4+7} = 15x^{11}$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint les regles de multiplicació de potències.

Calcula els següents productes de monomis i digues el grau del monomi resultant:

(29) $6x \cdot 2x$

(30) $3a^2 \cdot 6a$

(31) $4x \cdot 6x$

(32) $3x^2 \cdot 2x^3$

(33) $5a^2 \cdot 6a^3$

(34) $3abba$

(35) $x^2 \cdot x^3 \cdot x \cdot x^2$

(36) $3xy \cdot 2xy^2$

(37) $a^3b^2c \cdot ab^2c$

(38) $3x^2 \cdot 6x^3$

(39) $2x \cdot 3y \cdot 8x \cdot 5y$

(40) $3x \cdot 2y \cdot 4x$

(41) $5x^2 \cdot 3y^3 \cdot 2x^3 \cdot y$

(42) $(3x)^2 \cdot 9x$

(43) $x^4 \cdot 4x^3$

(44) $5x^2 \cdot 7x^5 \cdot x$

(45) $x \cdot (x^2)^3$

(46) $3x \cdot 7x^6$

(47) $x^7 \cdot 3x^9$

(48) $4x^3 \cdot 3x^2 \cdot 12x^4$

(49) $\left(\left(2x^4\right)^2\right)^3$

(50) $(2x^4)^3 \cdot (3x)^3$

(51) $x^3 \cdot (x^2)^4 \cdot x^2$

(52) $8x^3y^2 \cdot 7x^4y^2$

1.2 Polinomis

Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis, anomenats termes del polinomi. El cas concret d'un polinomi amb dos termes s'anomena **binomi**. Són polinomis:

$$3x^5+4x^2-6x+7 \qquad x^2+4x+4 \qquad 3x^3-2x^2+9x-15$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint S'anomena **grau** d'un polinomi a la potència més gran de tots els monomis que formen el polinomi. Per exemple, el polinomi $6x^4 - 3x^2 + 7x - 5$ té grau 4.

1.2.1 Suma de Polinomis

Siguin els polinomis

$$P(x) = x^2 + 2x + 3 \qquad R(x) = 2x^2 - 3x + 1 \qquad Q(x) = 3x^3 - x^2 - 5$$

$$G(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 1 \qquad H(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 2 \qquad S(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 3$$

$$T(x) = 2x^3 - x^2 + 7 \qquad U(x) = 5x^5 + 3x^3 - 2x \qquad V(x) = 3x^4 - 2x^2 - 6$$

calcula les següents operacions:

(**53**) $P(x) + R(x)$

(**54**) $P(x) + Q(x)$

(**55**) $R(x) + Q(x)$

(**56**) $P(x) + Q(x) + R(x)$

(**57**) $P(x) - R(x)$

(**58**) $P(x) - Q(x)$

(**59**) $R(x) - Q(x)$

(**60**) $2G(x) - 3H(x)$

(**61**) $3G(x) + H(x)$

(**62**) $S(x) + T(x)$

(**63**) $S(x) + U(x)$

(**64**) $S(x) + V(x)$

(**65**) $S(x) - T(x)$

(**66**) $U(x) - T(x)$

(**67**) $V(x) - S(x)$

(**68**) $2S(x) - 3T(x)$

(**69**) $S(x) + T(x) + U(x)$

(**70**) $T(x) + U(x) + V(x)$

(**71**) $2S(x) + 5U(x)$

(**72**) $3S(x) - V(x) - 7T(x)$

(**73**) $6T(x) - 4U(x) - 2S(x)$

(**74**) $7V(x) - 6T(x) - 21S(x)$

1.2.2 Avaluació Númerica de Polinomis

Els polinomis són una eina que ens serveixen per modelitzar la realitat. Ens serveixen per aproximar els comportaments naturals modelitzats per funcions que són tan complexes que els polinomis ens permeten fer-ho de forma més senzilla.

Per poder saber quin serà el comportament del sistema que podem estar estudiant en un moment concret, ens caldrà avaluar els polinomis per un valor concret.

Exemple 2

Si agafem el polinomi $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ anterior, si volem saber quan valdrà aquest polinomi en el punt $x = 2$ la única cosa que hem de fer, és substituir la x per el valor 2 i fer tots els càlculs que poguem.

$$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$$

Si ara calculem $P(1)$ i $P(-3)$

$$P(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$
$$P(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$$

Si prenem els polinomis de l'apartat anterior com a model, avalua els polinomis definits anteriorment en els punts donats:

(**75**) $P(2)$

(**76**) $P(4)$

(**77**) $P(-1)$

(**78**) $R(-1)$

(**79**) $R(-3)$

(**80**) $R(4)$

(**81**) $Q(1)$

(**82**) $Q(5)$

(**83**) $Q(-2)$

(**84**) $G(1)$

(**85**) $G(0)$

(**86**) $G(-3)$

(**87**) $H(2)$

(**88**) $H(-1)$

(**89**) $H(4)$

(**90**) $U(1)$

(**91**) $U(-1)$

(**92**) $U(3)$

(**93**) $S(2)$

(**94**) $S(-3)$

(**95**) $S(4)$

(**96**) $V(2)$

(**97**) $V(0)$

(**98**) $V(-1)$

(**99**) $Q(-5)$

(**100**) $R(2)$

(**101**) $U(10)$

1.2.3 Productes Notables

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \quad \boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint
Comprovem les igualtats amb les demostracions:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

I veiem uns exemples de com es desenvolupa amb polinomis:

Exemple 3

$$(x^3+4)^2 = (x^3)^2 + 2\cdot x^3\cdot 4 + 4^2 = x^6 + 8x^3 + 16$$
$$(x^3-4)^2 = (x^3)^2 - 2\cdot x^3\cdot 4 + 4^2 = x^6 - 8x^3 + 16$$
$$(x^3+4)(x^3-4) = (x^3)^2 - 4^2 = x^6 - 16$$

Calcula les següents multiplicacions utilitzant, quan es pugui, les fórmules del requadre anterior.

(102) $(x+2)^2$

(103) $(x-3)^2$

(104) $(x+1)(x-1))$

(105) $(x+2)(x-2)$

(106) $(x+3)(3-x)$

(107) $(2x+5)(2x-5)$

(108) $(x+7)^2$

(109) $(2x+1)(2x+1)$

(110) $(x-5)^2$

(111) $(4x+2)^2$

(112) $(x-6)^2$

(113) $(2x+3)^2$

(114) $(x-3)(x+1)$

(115) $(3x-1)^2$

(116) $(x+9)(x-9)$

(117) $(x+10)^2$

1.2.4 Multiplicació de polinomis

Per multiplicar polinomis hem de multiplicar cada monomi del primer polinomi per tots els monomis del segon polinomi, és a dir, s'han de multiplicar tots els monomis d'un per tots els monomis de l'altre. Ho podem fer de forma lineal o en forma de multiplicació per files. Si ho posem en forma de multiplicació de nombres enters de més de dos xifres, cal tenir en compte que a mida que anem multiplicant monomis s'han d'ordenar per graus de forma vertical per poder fer la suma final. Mireu els dos exemples següents:

Exemple 4

$$(x^2-2x+5)\cdot(2x-3) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 3x^2 + 6x - 15 = 2x^3 - 7x^2 + 16x - 15$$
$$(2x^3-3)\cdot(x^4+6x) = 2x^7 + 12x^4 - 3x^4 - 18x = 2x^7 + 9x^4 - 18x$$

$$\begin{array}{cccc}
 & x^2 & -2x & +5 \\
 & \times & 2x & -3 \\
\hline
 & -3x^2 & +6x & -15 \\
2x^3 & -4x^2 & +10x & \\
\hline
2x^3 & -7x^2 & +16x & -15
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & & 2x^3 & -3 \\
 & \times & x^4 & +6x \\
\hline
 & 12x^4 & & -18x \\
2x^7 & -3x^4 & & \\
\hline
2x^7 & +9x^4 & & -18x
\end{array}$$

Calcula les següents multiplicacions

(118) $(x^2-2x+1)\cdot(x-3)$

(119) $(2x^2-3x+4)\cdot(2x-3)$

(120) $(x^3-2x^2+4)\cdot(-x^2+5)$

(121) $(6x^6-x^3+4)\cdot(-2x^3+7)$

(122) $(-2x^3+4x+2)\cdot(x^2-3x+1)$

(123) $(3x^4-2x^2+3)\cdot(2x^2+5x-7)$

(124) $(7x^3+3x-2)\cdot(2x^2-3x+6)$

(125) $(6x^3+2x^2-2)\cdot(x-4)$

(126) $(7x^4-3x^2+4)\cdot(2x+1)$

(127) $(6x^3+2x^2+4x)\cdot(x-3)$

(128) $(x-2)^2\cdot(x+1)$

(129) $(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+5)$

(130) $(3x^5-2x^2+4x+3)\cdot(x+2)$

(131) $(3x^5-2x^4+3x+7)\cdot(x-4)$

(132) $(6x^4-3x+7)\cdot(x-5)$

(133) $(2x^5-8x+3)\cdot(x-7)$

(134) $(x-4)\cdot(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

(135) $(x^7-3x^5+x^3-8)\cdot(x+3)$

(136) $(x^5-3x^2+4)\cdot(x^3-5x^2-3)$

(137) $(x^4-2x^2+3x-2)\cdot(x^4-x^2+3)$

(138) $(x^2-2x+4)\cdot(x^2+2x+4)$

(139) $(x^{120}-4x^6+x^2)\cdot(x^2-2x+4)$

1.3 Solucions

(1) $-2x^2-2xy$

(2) $3x+2y$

(3) $-5x^2$

(4) $9y$

(5) $-5x$

(6) $-3a$

(7) $12r$

(8) $6x+y$

(9) $4x^3yz-7xy^2$

(10) xyz

(11) $-5x^2y$

(12) $7xyz$

(13) $6a^3b$

(14) $a-5b+7c+7d$

(15) $5x^4-6x^3+6x^2$

(16) 0

(17) $6a^3b$

(18) $11ab^2$

(19) $9x^2$

(20) $-7x^3+6x^2+10x$

(21) $-4x^4$

(22) $-4x^3+5x$

(23) $3x^2-13$

(24) $2x^5$

(25) $a-8b$

(26) $11a+10b$

(27) $-4a-4b$

(28) $-11x^3-2x$

(29) $12x^2$

(30) $18a^3$

(31) $24x^2$

(32) $6x^5$

(33) $30a^5$

(34) $3a^2b^2$

(35) x^8

(36) $6x^2y^3$

(37) $a^4b^4c^2$

(38) $18x^5$

(39) $240x^2y^2$

(40) $24x^2y$

(41) $30x^5y^4$

(42) $81x^3$

(43) $4x^7$

(44) $35x^8$

(45) x^7

(46) $21x^7$

(47) $3x^{16}$

(48) $144x^9$

(49) $64x^{24}$

(50) $216x^{15}$

(51) x^{13}

(52) $56x^7y^4$

(53) $3x^2-x+4$

(54) $3x^3+2x-2$

(55) $3x^3+x^2-3x-4$

(56) $3x^3+2x^2-x-1$

(57) $-x^2+5x+2$

(58) $-3x^3+2x^2+2x+8$

(59) $-3x^3+3x^2-3x+6$

(60) $2x^5-3x^4-17x^3+7x^2+8$

(61) $3x^5+x^4-9x^3+5x^2+1$

(62) $x^4+2x^3-4x^2+5x+4$

(63) $5x^5+x^4+3x^3-3x^2+3x-3$

(64) $4x^4-5x^2+5x-9$

(65) $x^4-2x^3-2x^2+5x-10$

(66) $5x^5+x^3+x^2-2x-7$

(67) $2x^4+x^2-5x-3$

(68) $2x^4-6x^3-3x^2+10x-27$

(69) $5x^5+x^4+5x^3-4x^2+3x+4$

(70) $5x^5+3x^4+5x^3-3x^2-2x+1$

(71) $25x^5+2x^4+15x^3-6x^2-6$

(72) $-14x^3+15x-52$

(73) $-20x^5-2x^4-2x+48$

(74) $-12x^3+55x^2-105x-21$

(75) 11

(76) 27

(77) 2

(78) 6

(79) 28

(80) 21

(81) -3

(82) 345

(83) -33

(84) 0

(85) 1

(86) -116

(87) 34

(88) -5

(89) 430

(90) 6

(91) -6

(92) 1290

(93) 11

(94) 36

(95) 225

(96) 34

(97) -6

(98) -5

(99) -405

(100) 7

(101) 502980

(102) x^2+4x+4

(103) x^2-6x+9

(104) x^2-1

(105) x^2-4

(106) $9-x^2$

(107) $4x^2-25$

(108) $x^2+14x+49$

(109) $4x^2+4x+1$

(110) $x^2-10x+25$

(111) $16x^2+16x+4$

(112) $x^2-12x+36$

(113) $4x^2+12x+9$

(114) x^2-2x-3

(115) $9x^2-6x+9$

(116) x^2-81

(117) $x^2+20x+100$

(118) x^3-5x^2+7x-3

(119) $4x^3-12x^2+17x-12$

(120) $-x^5+2x^4+5x^3-14x^2+20$

(121) $-12x^9+44x^6-15x^3+28$

(122) $-2x^5+6x^4+2x^3-10x^2-2x+2$

(123) $6x^6+15x^5-25x^4-10x^3+20x^2+15x-21$

(124) $14x^5-21x^4+48x^3-13x^2+24x-12$

(125) $6x^4-22x^3-8x^2-2x+8$

(126) $14x^5+7x^4-6x^3-3x^2+8x+4$

(127) $6x^4-16x^3-2x^2-12x$

(128) x^3-3x^2+4

(129) x^3+6x^2-x-30

(130) $3x^6+6x^5-2x^3+11x+6$

(131) $3x^6-14x^5+8x^4+3x^2-5x-28$

(132) $6x^5-30x^4-3x^2+22x-35$

(133) $2x^6-14x^5-8x^2+59x-21$

(134) x^4-20x^2+64

(135) $x^8+3x^7-3x^6-9x^5+x^4+3x^3-8x-24$

(136) $x^8-5x^7-6x^5+15x^4+4x^3-11x^2-12$

(137) $x^8-3x^6+3x^5+3x^4-3x^3-4x^2+9x-6$

(138) x^4+4x^2+16

(139) $x^{122}-2x^{121}+4x^{120}-4x^8+8x^7-16x^6+x^4-2x^3+4x^2$

Capítol 2

Combinatòria i Probabilitat

2.1 Variacions

2.1.1 Variacions amb repetició

Tenim m boles numerades en una urna. Traiem una bola de l'urna, apuntem el seu número i la tornem a posar dins de l'urna (reposició). I repetim l'experiment n vegades.
Per poder-ho expressar escrivim:

$$\boxed{VR_{m,n} = m^n}$$

I es llegeix com variacions amb repetició d'm elements agrupats d'n en m.

2.1.2 Variacions sense repetició

Tenim m boles numerades en una urna. Traiem una bola de l'urna, apuntem el seu número però **no** la tornem a posar dins de l'urna (sense reposició). I repetim l'experiment n vegades.
Per poder-ho expressar escrivim:

$$\boxed{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}$$

I es llegeix com variacions d'm elements agrupats d'n en n.

(**1**) Quants nombres de sis xifres es poden escriure amb les xifres senars ? Exemples : 735951, 311593,. . .

(**2**) Arriben sis clients a un hotel i hi ha 4 habitacions lliures. De quantes maneres es poden distribuir si cada client vol una habitació per a ell sol?

(**3**) En la cursa dels 1500 metres, hi participen 7 corredors. De quantes maneres diferents es poden repartir les tres medalles ?

(**4**) Quaranta persones compren números en una tómbola en la que es rifen 5 premis. De quantes maneres es poden repartir?

(**5**) En un examen tipus test de 20 preguntes, cada pregunta té cinc possibles respostes (a, b, c, d ,e). Un estudiant que no sap res del tema ha decidit respondre a l'atzar. De quantes maneres pot fer-ho?

(**6**) Quants "capicues"de 5 xifres es poden formar amb les 9 xifres significatives, sabent que les xifres es poden repetir?

(**7**) Una línia de tren té 8 estacions. Si a cada bitllet hi ha el nom de l'estació de sortida i el de la d'arribada, quants bitllets de tren diferents hi ha?

(**8**) Una empresa disposa de 3 llocs de treball diferents per omplir amb 7 candidats. De quantes maneres pot repartir-los?

(9) Un pare té cinc fills i cada trimestre reparteix 3 premis: Un al millor estudiant, l'altre al que fa millor les feines de casa i l'últim al millor esportista. De quantes maneres pot repartir-los?

(10) Calcula quantes variacions amb repetició podem fer amb les lletres $a,\ b,\ c$ agafades de dos en dos.

(11) Es tira una moneda enlaire i s'observa si ha sortit cara o creu. Es repeteix la tirada quatre vegades. Quants resultats diferents es poden obtenir?

(12) Volem formar nombres de 4 xifres amb les xifres 2, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Quants se'n podran formar?

(13) A la lliga de futbol de primera divisió hi participen 20 equips. Quants partits es juguen en tota la competició?

(14) Es tiren tres daus de colors diferents. Quants resultats diferents se'n poden obtenir?

(15) Forma totes les combinacions de lletres $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ agafades de 3 en 3.

(16) Quants nombres hi ha compresos entre 1000 i 10000 en els quals només figurin les xifres 1, 2, 3, 4, 5 i 6 ? Fes-ho amb repetició i sense repetició.

(17) En un edifici hi ha 18 habitatges i cal escollir una persona per a la presidència i una altra per a la vicepresidència de la comunitat de veïns. Quantes eleccions diferents es poden fer?

(18) En un concurs musical s'hi presenten 15 concursants. Hi ha tres premis per repartir: Millor interpretació, millor composició i millor vestuari. De quantes maneres poden quedar distribuïts els premis? (Una mateixa persona no pot obtenir més d'un premi)

(19) De quantes maneres diferents pots treure dues cartes d'un joc de 48? Quina és la probabilitat que les dues siguin d'oros?

2.2 Permutacions

2.2.1 Permutacions amb Repetició

Diem permutacions amb repetició de m elements, als grups que poden formar-se amb els m elements, dels quals n'hi ha que estan repetits un cert número de vegades.

En general la fórmula per trobar el número de permutacions amb repetició d'n elements on hi ha grups repetits d'a, b, c, ... elements és :

$$\boxed{PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a!b!c!\cdots}}$$

2.2.2 Permutacions Circulars

Podem plantejar el problema d'ordenar una sèrie d'objectes en forma circular, de manera que dues ordenacions es considerin iguals si cada objecte en les dues ordenacions està precedit i seguit pels mateixos objectes. En aquest cas, podem pensar que, fixat un dels objectes, només cal col·locar els altres $n-1$.

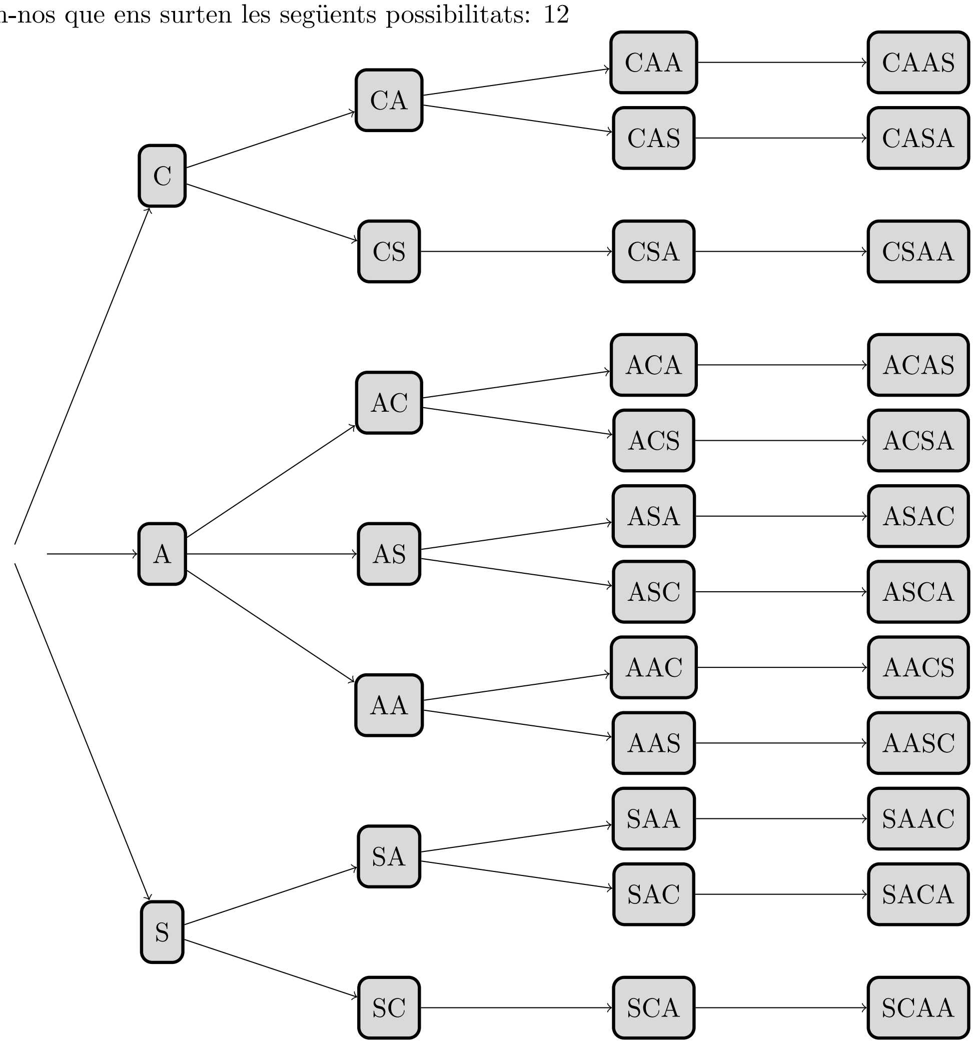
Per tant, el nombre d'ordenacions possibles són les permutacions circulars:

$$\boxed{PC_n = (n-1)!}$$

Exemple: De quantes maneres es poden col·locar 4 persones per jugar a la botifarra? S'han de seure al voltant d'una taula, llavors serà:

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

Exemple: Amb les lletres de la paraula “CASA”. Quantes ordenacions diferents podem escriure? Fixem-nos que ens surten les següents possibilitats: 12



(**20**) De quantes maneres diferents es poden asseure 4 persones en un banc ?

(**21**) En una competició hi participen set persones. Quantes classificacions diferents es poden obtenir?

(**22**) De quantes maneres es poden asseure cinc persones en una fila de cinc cadires?

(**23**) Quantes paraules diferents es poden formar amb les lletres de la paraula ”MATEMÀTICA”?

(**24**) Quantes paraules podem formar amb les lletres de ABRACADABRA?

(**25**) En un plató de televisió, es pretén col·locar 5 persones al voltant d’una taula rodona per fer un programa de tertúlia. De quantes maneres diferents podem fer-ho?

(**26**) De quantes maneres puc col·locar 7 objectes en una estanteria si 3 són repetits?

(**27**) Quedem 6 amics per sopar a un restaurant. De quantes maneres diferents podem seure al voltant de la taula?

(**28**) Forma tots els números de 6 xifres amb les xifres $2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ de manera que entrin totes en cada número i no se’n repeteixi cap. Quantes d’aquests números tindràn el 7 com a xifra de les centenes?

(**29**) Quants números podem escriure amb les xifres $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ de manera que entrin totes en cada número i no se’n repeteixi cap. Quants d’aquests números són més petits que 54000?

(**30**) De quantes maneres puc col·locar 10 llibres en una estanteria?

(**31**) De quantes maneres es pot escriure la paraula ESPRIU de manera que com a primera lletra tingui sempre la E i com a última la U?

(**32**) De quantes maneres diferents es poden asseure 4 persones en un banc?

2.3 Combinacions

Tenim n boles numerades en una urna. D'una grapada traiem k boles (evidentment $k \leq n$). Considerem que les boles no estan ordenades, és a dir, dos resultats són iguals si els números de les boles són els mateixos, sense importar el seu ordre. Tots els resultats possibles de l'experiment són :

$$\boxed{C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Combinacions de n elements agafats de k en k.

2.3.1 Combinacions amb repetició

Tenim k urnes, cada una d'elles amb n boles numerades. Traiem una bola de cada urna. Considerem que dues extraccions són iguals si tenen el mateix nombre de boles amb el mateix número. Resultat: Tots els resultats possibles de l'experiment són :

$$\boxed{CR_n = C_{n+k-1}^k = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ n-1 \end{array} \right)}$$

Combinacions amb repetició de n elements agafats de k en k.

(**33**) Una companyia de comediants té en la seva llista 40 membres. Durant quants dies poden escollir un grup diferent de 6 comediants, si cada dia es forma un grup?

(**34**) Amb 10 colors quantes barreges podem fer agafant 3 colors cada vegada?

(**35**) Un barman disposa de sis begudes per fer combinats. Si en cada combinat hi posa 3 begudes, quines combinacions pot fer amb les begudes: anís, conyac, calisay, suc de taronja, ratafia, tònica ?

(**36**) Calcula combinacions de 6 elements agafats de dos en dos i comprova que et dóna el mateix resultat que combinacions de 6 elements agafats de quatre en quatre.

(**37**) Una comissió ha de constar de 2 professors i 4 alumnes. Quantes comissions es podran formar amb 7 professors i 10 alumnes per escollir?

(**38**) En una habitació hi ha 6 llums, però amb 3 n'hi ha prou per tenir-la ben il·luminada. Quantes combinacions es poden fer?

(**39**) Un equip de treball està format per 9 alumnes. Han d'anar tres d'aquests alumnes a parlar amb el professor i volen considerar totes les possibilitats. Quantes n'hi ha?

(**40**) Un equip mèdic està format per 3 metges i 5 infermeres. Quants equips es podran preparar amb 7 metges i 5 infermeres per escollir?

(**41**) Quants nombres de quatre xifres repetides o no, es poden formar amb els dígits: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? I si no es poguessin repetir les xifres quants nombres es podrien fer? Quants d'aquests últims nombres són parells? I quants comencen per 35?

(**42**) Quantes butlletes hem d'omplir per assegurar que encertarem els tres primers classificats en una cursa de set cavalls?

(**43**) Amb tres vocals i tres consonants, quantes paraules de sis lletres es poden formar amb la condició de que no figurin dues consonants seguides? (considereu 5 vocals i 20 consonants)

(**44**) Quantes ordenacions són possibles amb les lletres de la paraula INSUF?

(**45**) La professora de Català presenta 8 novel·les diferents de les que s'han de triar 3 per llegir-les. Quantes opcions tens?

(**46**) La professora de Català presenta 6 novel·les, 5 obres de teatre i 4 poesies, s'han de triar 3 novel·les, 3 obres teatrals i 2 poesies. Quantes opcions tens?

(**47**) De quantes formes diferents es poden col·locar cinc persones en un banc de cinc places? I si el banc fos de set places?

(**48**) El codi d'una llibreta de la Caixa té 4 xifres (del 0 al 9) quantes combinacions existeixen?

(**49**) Quants subconjunts de dos elements té un conjunt de cinc elements? I si els subconjunts fossin de tres elements? I de quatre? I de cinc? I de zero elements? Quants subconjunts té un conjunt de cinc elements?

(**50**) Imaginat ordenades de forma creixent tots el nombres resultants de les permutacions de les xifres 1, 2, 3, 4 i 5. Quin lloc ocupa en l'ordenació el nombre 25143?

(**51**) De quantes formes diferents es poden col·locar 8 persones en una taula rodona?

(**52**) Si en un sopar de 12 defensors de l'educació pública que tornen d'una manifestació, acorden no començar a fer el sopar fins que haguessin esgotat totes les formes possibles d'asseure a la taula, que et sembla, estarien encara ara sopant?

(**53**) Quants collarets diferents es poden formar amb 20 boletes iguals, però que 15 són blanques i 5 negres, de forma que l'última boleta no toca a la primera?

(**54**) En un pla hi ha 12 punts de forma que no n'hi ha tres que estiguin alineats, quantes rectes diferents es poden traçar de forma que passin per dos d'aquests punts?

(**55**) De quantes formes es poden posar 5 anells diferents en els dits d'una mà?. Conteu 4 dits, tots excepte el gran.

(**56**) Disposem de cinc pesos diferents de: 10, 20, 50, 100 i 200 grams. Quantes pesades diferents es poden fer?

(**57**) Amb cinc licors diferents quants 'coctels' diferents es poden fer? Entenent que un coctel ha de tenir un mínim de 2 licors.

(**58**) Si disposem de 12 teles de colors diferents, quantes banderes diferents de tres franges horitzontals es poden fer?

(**59**) De quantes formes es poden repartir 10 CDs diferents entre els 27 alumnes d'una classe de forma que com a màxim els toqui un CD per cap? I si els CDs són iguals?

(**60**) En una reunió hi participen 14 francesos, 16 alemanys i 8 catalans. Es vol formar una comissió formada per 3 francesos, 4 alemanys i 2 catalans. Quantes comissions diferents es poden formar?

(**61**) En un curs hi ha 10 assignatures. Les notes possibles per a cada assignatura són: Ex, Not, Bé, Suf, Ins i MD. Quantes qualificacions diferents pot obtenir?

(**62**) Quants capicues es poden formar de 7 xifres?

(**63**) Quantes matrícules diferents hi poden haver a tot l'estat? (recordeu 4 xifres i tres lletres entre 28 lletres)

(**64**) Una persona té 8 pots de pintura de diferents colors, vol pintar les quatre parets i el sostre de la seva habitació d'un color diferent, de quantes formes ho pot fer? I si no calgués que els colors fossin diferents?

(**65**) Les paraules de l'alfabet Morse estan composades de ralles i punts. Quantes paraules diferents es poden fer amb 3 ralles i 2 punts?

(**66**) Un partit de futbol ha acabat amb el resultat 6 a 4. de quantes formes diferents es pot haver mogut el marcador per passar del 0 a 0 inicial fins el 6 a 4 final?

(**67**) Una pissarra està dividida en cinc parts. Tres alumnes han de fer un exercici a una part de la pissarra. De quantes formes es poden col·locar?

(**68**) En un pla hi ha dibuixades 25 rectes de manera que no hi ha cap parella paral·lela ni 3 rectes que es tallin en un sol punt. Quants punt d'intersecció hi ha?

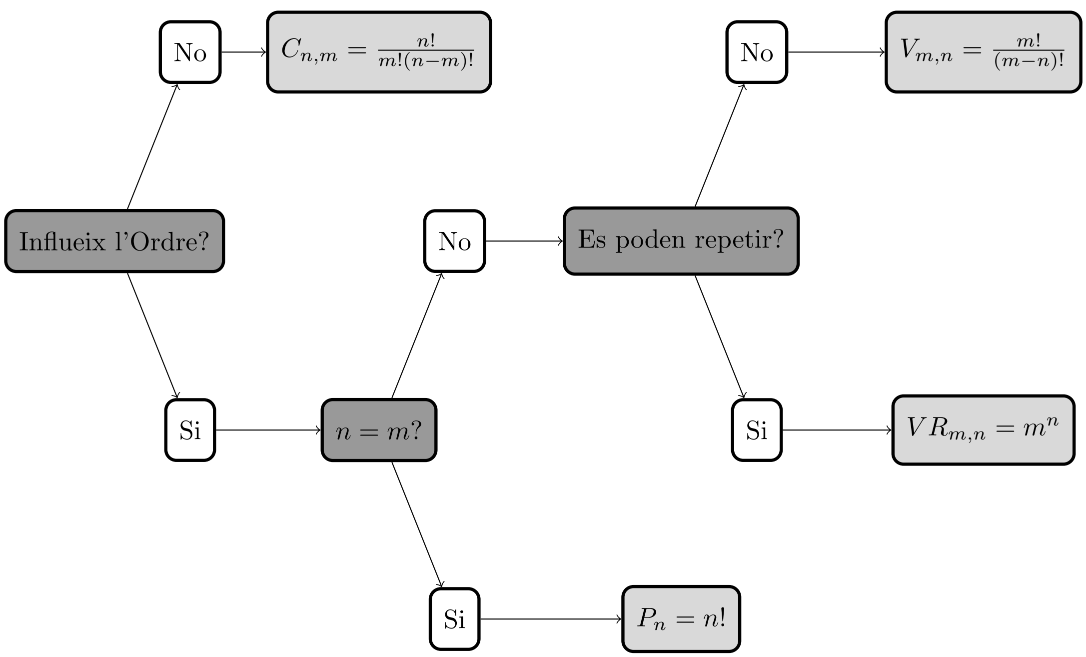
(**69**) De quantes formes 6 alumnes poden agafar un bolígraf d'un conjunt de 8 bolígrafs diferents?

(**70**) Si tenim 6 pintures de diferents colors de quantes formes podem pintar 4 boles iguals? I si les boles fossin de diferent grandària?

(**71**) Una habitació té 6 llums, es pot il·luminar l'habitació amb 0 llums encesos, amb 1 llum encès, amb dos llums encesos, etc. De quantes formes es pot il·luminar l'habitació?

(**72**) Si el joc del domino arribés fins a 10 punts (del 0 al 10), quantes fitxes tindria?

2.4 Esquema



2.5 Solucions

(**1**) 15625

(**2**) $V_6, 4 = 360$

(**3**) 210

(**4**) 78.960.960

(**5**) $9,53 \cdot 10^{13}$

(**6**) 729

(**7**) 56

(**8**) 210

(**9**) 125

(**10**) 9

(**11**) 16

(**12**) 2401

(**13**) 380

(**14**) 216

(**15**) 20

(**16**) 1296

(**17**) 306

(**18**) 2730

(**19**) 2256

(**20**) 24

(**21**) 5040

(**22**) 120

(**23**) 453.600

(**24**) 83160

(**25**) 24

(**26**) 840

(**27**) 144

(**28**) 720, 120

(**29**) 120, 114

(**30**) 362.8800

(**31**) 1

(**32**) 24

(**33**) 3.838.380

(**34**) 120

(**35**) 20

(**36**) 15

(**37**) 4410

(**38**) 20

(**39**) 84

(**40**) 35

(**41**) 1296, 360, 180 i 12

(**42**) 210

(**43**) 1.641.600

(**44**) 120

(**45**) 56

(**46**) 36

(**47**) 120 i 2.520

(**48**) 10.000

(**49**) 10, 10, 5, 1, 1 i 32

(**50**) 44

(**51**) 5.040

(**52**) Sí

(53) 15.504

(54) 66

(55) 1024

(56) 31

(57) 26

(58) 1320

(59) $\frac{27!}{17!}$ i 8.436.285

(60) 18.549.440

(61) 1.000.000

(62) 9000

(63) 196.560.000

(64) 6720 i 32768

(65) 10

(66) 210

(67) 60

(68) 2300

(69) 20160

(70) 15, 360

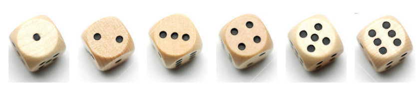
(71) 64

(72) 66

2.6 Experiments aleatoris

2.6.1 Espai mostral i esdeveniments

Un experiment aleatori és aquell que, abans de realitzar-lo, no es pot predir el resultat que s'obtindrà.
Encara que en un experiment aleatori no sapiguem el que ocorrerà en realitzar una "prova"si que coneixem per endavant tots els seus possibles resultats.
L'espai mostral és el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori.
Se sol designar amb la lletra **E**.
Cadascun dels possibles resultats s'anomena esdeveniment elemental.
Anomenarem esdeveniment a qualsevol subconjunt de l'espai mostral. El mateix espai mostral és un esdeveniment anomenat esdeveniment segur i el conjunt buit, $\varnothing$, és l'esdeveniment impossible[1].
En l'experiment aleatori de "tirar un dau cúbic"hi ha 6 possibles resultats, que seria

l'Espai Mostral **E**={  }

Podem definir alguns esdeveniments que ens inventem sobre alguns possibles resultats que ens poden sortir. Per exemple

- Fem que surti senar: $A =$ {  }
- Que surti més gran que 3: $B =$ {  }
- O que surti el número 6: $C =$ {  }

En l'experiment aleatori de "llançar dues monedes"hi ha 4 possibles resultats, que seria

l'Espai Mostral **E**={  }

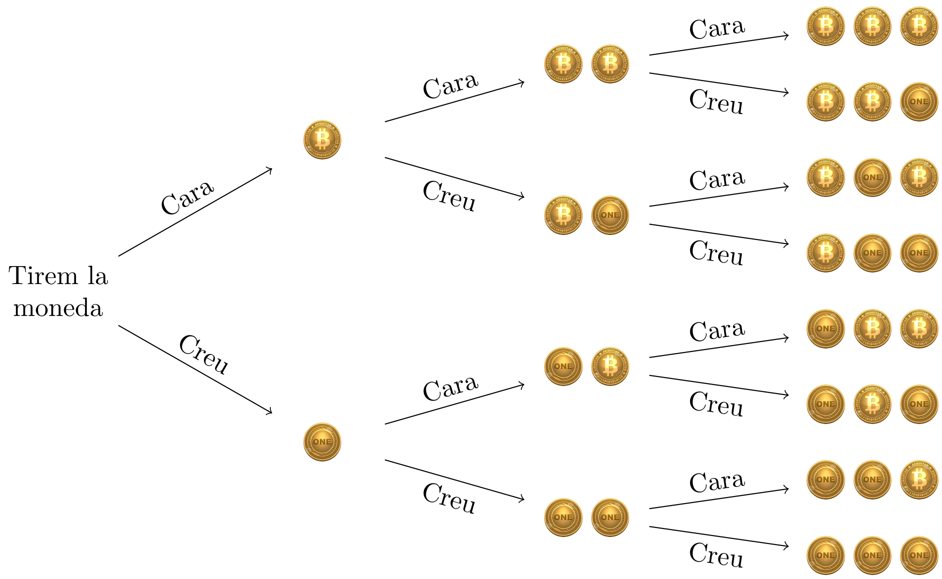
I si definim alguns esdeveniments, tenim diferents conjunts de resultats. Per exemple,

- Fem que surti almenys una cara: $A =$ {  }
- La primera és cara: $B =$ {  }
- O cap és cara: $C =$ {  }

[1] $\varnothing$ símbol amb el que es designa el conjunt buit o que no conté cap element

2.6.2 Tècniques de recompte

En moltes ocasions un experiment aleatori està format per la successió d'altres més senzills, se'n diu compost; és el cas de "tirar dos daus", "llançar dues o més monedes", "treure diverses cartes d'una baralla", ... En aquests casos per obtenir l'espai mostral es pot utilitzar una tècnica que va molt bé, fer un diagrama d'arbre.
Per exemple, si fem un diagrama d'arbre de l'experiment llençar 3 monedes, obtenim $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultats:



Observa que si el primer experiment té m resultats diferents i el segon n, el nombre de resultats per a la combinació d'ambdós experiments és $m \cdot n$.

2.7 Probabilitat

2.7.1 Probabilitat d'un esdeveniment

La probabilitat d'un esdeveniment, S, indica el grau de possibilitat que ocorri aquest esdeveniment. S'expressa mitjançant un nombre comprés entre 0 i 1, i ho escrivim $P(S)$.

Si $P(S)$ és proper a 0 l'esdeveniment és poc probable i serà més probable com més s'apropi a 1, que és la probabilitat de l'esdeveniment segur, $P(S) = 1$.

Quan es repeteix un experiment aleatori moltes vegades, la freqüència relativa amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix, a mesura que augmenta el nombre de proves realitzades. Aquest resultat, conegut com llei dels grans nombres, ens porta a definir la **probabilitat d'un esdeveniment** com el nombre cap al que tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment molts cops.
En tirar un dau moltes vegades, les freqüències relatives de cada cara s'estabilitzen al voltant de $\frac{1}{6}$.

	f	f_r
1	1684	0,168
2	1699	0,17
3	1602	0,16
4	1627	0,163
5	1670	0,167
6	1718	0,172

P() $= \frac{1}{6}$

Taula 2.1: Total de tirades: 10 000

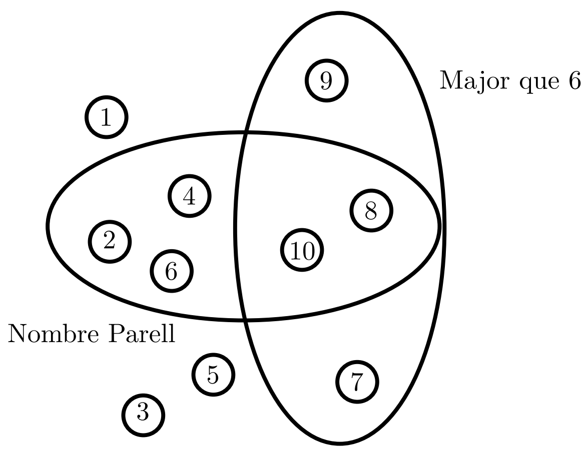
2.7.2 La Regla de Laplace

Quan dos esdeveniments tenen la mateixa probabilitat de passar, en realitzar un experiment aleatori, es diuen equiprobables.
Si en un espai mostral tots els esdeveniments elementals són equiprobables, l'experiment es diu regular i la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, es pot calcular amb la Regla de Laplace, segons la qual n'hi ha prou en comptar, i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que componen A i el nombre total d'esdeveniments elementals de l'espai mostral. Se sol enunciar així:

$$\boxed{\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{Número de casos favorables}}{\textbf{Número de casos possibles}}}$$

Exemple 1:

En una urna hi ha 10 boles numerades de l'1 al 10, se'n treu una a l'atzar.
Casos possibles: 10



Quina és la probabilitat que sigui un nombre parell?

Casos favorables: 5,

$P(Nombre\ Parell) = \frac{5}{10} = 0,5$

I la probabilitat que sigui un nombre major que 6?

Casos favorables: 4,

$P(Major\ que\ 6) = \frac{4}{10} = 0,4$

Exemple 2:
En l'experiment de llançar tres monedes, hi ha 8 casos possibles:

A="Sortir tres cares", Casos favorables $\rightarrow$ 1 $\quad P(A) = \frac{1}{8}$

B="Sortir dues cares", Casos favorables $\rightarrow$ 3 $\quad P(B) = \frac{3}{8}$

C="Almenys una cara", Casos favorables $\rightarrow$ 7 $\quad P(C) = \frac{7}{8}$

Exemple 3:
Es tiren dos daus i es tria el major dels nombres obtinguts. Hi ha 36 casos possibles. Veiem les probabilitats de treure un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 o un 6.

						
	1	2	3	4	5	6
	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6

$P(1) = \frac{1}{36}$ $\quad P(2) = \frac{7}{36}$ $\quad P(3) = \frac{5}{36}$

$P(4) = \frac{7}{36}$ $\quad P(5) = \frac{9}{36}$ $\quad P(6) = \frac{11}{36}$

2.7.3 Propietats de la probabilitat

En assignar probabilitats mitjançant la regla de Laplace o utilitzant la freqüència relativa pots comprovar que s'acompleix:

- $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$. La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre comprès entre 0 i 1.
- $\mathbf{P(E) = 1}$ $\mathbf{P(\varnothing) = 0}$. La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la de l'esdeveniment impossible és 0.
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments incompatibles és $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

A més d'aquestes propietats es dedueixen aquestes altres que resulten molt útils per calcular probabilitats:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A)} \\ \mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}\end{array}}$$

En aquest cas, cal tenir en compte que $\bar{A}$ és l'esdeveniment contrari a A.

Exemple 1:

Agafem la urna on hi ha les 10 boles numerades i n'extraiem una. Definim dos esdeveniments:
A="Treure un número menor que 5"
B="Treure un número múltiple de 5"
A i B són incompatibles

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,2 \quad P(A \cup B) = 0,6 \Longrightarrow \mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Exemple 2:

Tornem a extreure una bola. Definim dos esdeveniments:
A="Treure un número menor que 5"
B="Treure un número parell"
A i B són compatibles

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,5 \quad P(A \cup B) = 0,7 \quad P(A \cap B) = 0,2 \Longrightarrow \mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Exemple 3:

Finalment tornem a extreure una bola. Definim un esdeveniment:
A="Treure un número menor que 5"

$$P(A) = 0,4 \quad P(\bar{A}) = 0,6 \quad A \cup \bar{A} = E \quad A \cap \bar{A} = \varnothing \Longrightarrow \mathbf{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

2.7.4 Exercicis

(**73**) Indica si els següents experiments són aleatoris o no, en cas afirmatiu escriu l'espai mostral:

(a) Treure una carta d'una baralla espanyola i anotar el coll.

(b) Pesar un litre d'oli.

(c) Mesurar la hipotenusa d'un triangle rectangle coneguts els catets.

(d) Triar, sense mirar, una fitxa de dòmino.

(e) Encertar el resultat d'un partit de futbol abans no es jugui.

(f) Treure una bola d'una bossa amb 4 boles vermelles.

(g) Treure una bola d'una bossa amb 1 bola vermella, 1 verda, 1 blava i 1 blanca..

(h) Llançar a l'aire una moneda i observar el temps que tarda en arribar al terra.

(**74**) Calcula las possibilitats mitjançant un diagrama d'arbre:

(a) En un equip de futbol-sala disposen per jugar de pantalons blancs o negres, i de camisetes vermelles, blaves o verdes. De quantes maneres es poden vestir per jugar?

(b) Es tira una moneda i un dau, quins són els resultats possibles?

(c) Es tira una moneda, si surt cara es treu una bola de l'urna A que conté una bola vermella, una blava i una verda; i si surt creu es treu de l'urna B en la que hi ha una bola vermella, una blava, una blanca i una negra. Escriu els possibles resultats.

(d) La Marta i la Maria juguen un campionat de parxís, guanya la primera que guanyi dues partides seguides o tres d'alternes. De quantes maneres es pot desenvolupar el joc?

(**75**) La ruleta és un conegut joc dels casinos. Consisteix en una roda equilibrada, dividida en 37 caselles numerades del 0 al 36. El 0 és de color verd i si surt guanya la banca. Hi ha diferents tipus d'apostes, a un nombre sol, a "parell"o a "senar", a "vermell"o a "negre", a "passa"(número> 18) o a "falta"(número< 18), a una columna, ...
Calcula les següents probabilitats:

(a) $P(17)$

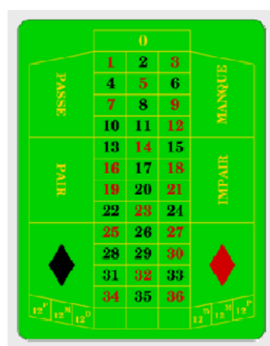
(b) $P($"senar"$)$

(c) $P($"2a columna"$)$

(d) $P($"parell i vermell"$)$

(e) $P($"senar i falta"$)$

(f) $P($"vermell"$)$



(**76**) En l'última avaluació, en la meva classe van aprovar les Matemàtiques el 67% i l'Anglès el 63%, el 38% van aprovar les dues assignatures. Escollit un estudiant de la classe a l'atzar, calcula la probabilitat que:

(a) Hagi aprovat alguna de les dues

(b) No hagi aprovat cap de les dues

(c) Hagi aprovat només les Matemàtiques

(d) Hagi aprovar només una de les dues

(**77**) En tirar una xinxeta pot caure amb la punta cap amunt o cap avall. Per esbrinar la probabilitat de cada un d'aquests esdeveniments, s'ha fet l'experiment moltes vegades obtenint els resultats donats a la taula. A la vista d'aquests, quina probabilitat assignaries a l'esdeveniment "caure amb la punta cap avall"?

(**78**) Escollim una fitxa de dòmino a l'atzar,

(a) Descriu els esdeveniments: $A =$"Treure una fitxa doble" i $B =$"Treure una fitxa de la qual sumin 5 o múltiple de 5"

Número de tirades	10	50	100	500	1000
Punta cap amunt	7	29	65	337	668

(b) Escriu $A \cup B$ i $A \cap B$

(**79**) Escriu l'espai mostral de l'experiment resultant de tirar 3 monedes. Considera els esdeveniments: $A =$"Sortir una cara" $B =$"Sortir almenys una cara" Escriu $A \cup B$, $A \cap B$ i l'esdeveniment contrari de B.

(**80**) En una urna hi ha 15 boles numerades de l'1 al 15, se'n treu una d'elles; considera els esdeveniments: $A =$"Treure un número parell" $B =$"Treure un múltiple de 4" Escriu $A \cup B$, $A \cap B$.

(**81**) En una caixa hi ha 5 boles vermelles, 4 verdes i 3 blaves. Es treu una bola i s'anota el color, calcula la probabilitat que sigui de color verd.

(**82**) Es tria a l'atzar un nombre entre els 50 primers nombres natural (a partir de l'1). Calcula la probabilitat dels esdeveniments: $A =$"Sortir un nombre major que 4 i menor que 17". $B =$"Sortir un quadrat perfecte"

(**83**) D'una baralla de cartes espanyola es treu una carta, calcula la probabilitat dels esdeveniments: $A =$"Sortir bastos" $B =$"No sortir ni bastos ni as"

(**84**) Tirem dos daus i ens fixem en la menor de les puntuacions. Calcula la probabilitat que sigui un 3.

(**85**) Traiem una fitxa de dòmino, calcula la probabilitat que la suma dels punts sigui menor que 7.

(**86**) Amb un 1, un 2 i un 3, formem tots els nombres possibles de 3 xifres, si escollim un d'aquests a l'atzar, calcula la probabilitat que acabi en 3.

(**87**) En girar la ruleta de la figura, calcula la probabilitat que surti vermell i major que 3.

(**88**) La probabilitat d'un esdeveniment és 0.21, calcula la de l'esdeveniment contrari.

(**89**) En una urna hi ha boles blanques i negres.
La Maria diu: "La probabilitat de treure una bola blanca és $\frac{5}{26}$"
En Sergi diu: "La probabilitat de treure una bola negra és $\frac{11}{13}$"

(a) Poden ser correctes ambdós afirmacions?

(b) Si la Maria té raó, quina és la probabilitat de treure una bola negra?

(**90**) En un restaurant ofereixen un menú que consta de primer plat a triar entre amanida, pasta o llegums; un segon plat a triar entre carn o peix; i postres a escollir entre fruita o gelat. L'Anna escull el seu menú a l'atzar, calcula la probabilitat que mengi (Suggeriment: Fes un diagrama d'arbre):

(a) Amanida, carn i fruita.

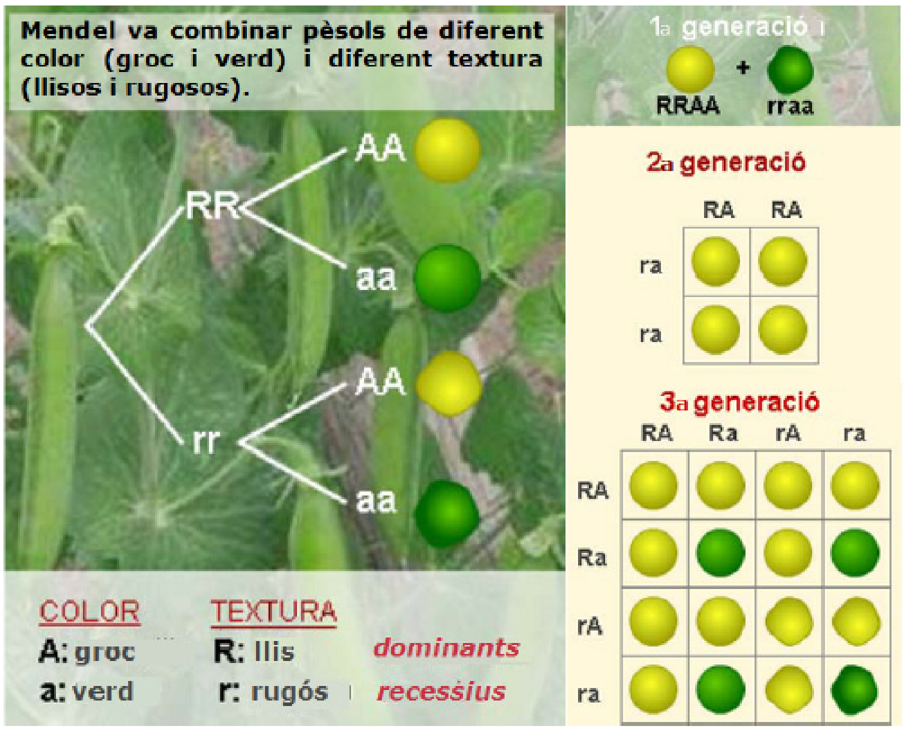
(b) Pasta i peix.

(**91**) En un institut el 66% dels estudiants són afeccionats al futbol i el 42% ho són al bàsquet. Hi ha un 27% que són afeccionats als dos esports. Calcula la probabilitat que un estudiant triat a l'atzar no sigui afeccionat al futbol ni al bàsquet.

2.8 Per saber-ne més

2.8.1 Probabilitat i genètica Les lleis de Mendel

Gregor Mendel (1822-1884), fou un monjo i naturalista nascut a Heizendorf (actual Hyncice, República Txeca). A través dels seus treballs, que va portar a terme amb diferents varietats de la planta del pèsol, va ser el primer en descriure les lleis que regeixen l'herència genètica. Per fer-ho va aplicar la probabilitat, com descriu en la seva obra "La Matemàtica de l'herència"



1^a Llei de Mendel

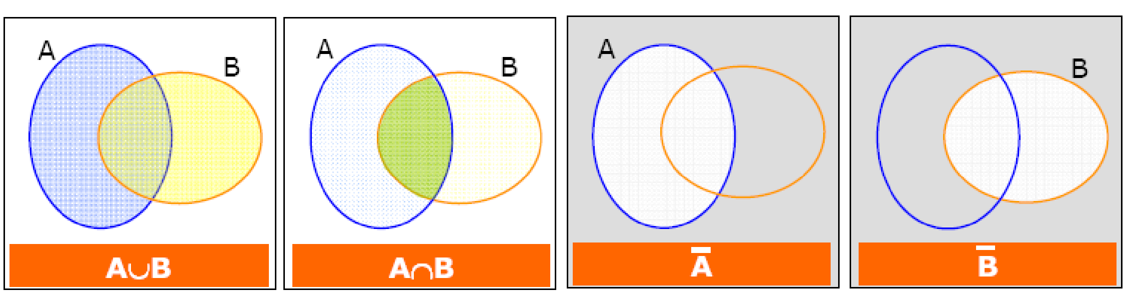
En creuar dues línies pures, diferents per algun caràcter, el 100% dels descendents són iguals entre si i iguals a l'ascendent dominant.

A la 3a generació tenim el següent comportament:

$$P(\text{groc llis}) = \frac{9}{16} \quad P(\text{groc rugós}) = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{verd llis}) = \frac{9}{16} \quad P(\text{verd rugós}) = \frac{9}{16}$$

2.8.2 I recorda... Operacions amb esdeveniments



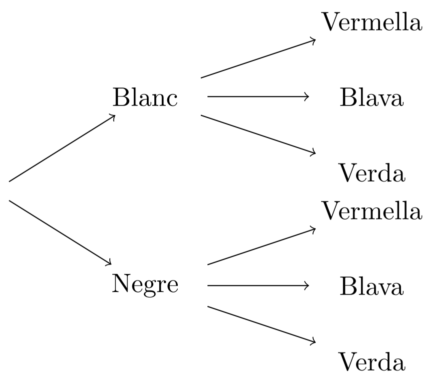
- Esdeveniment unió de A i B, $A \cup B$, és el que ocorre quan ocorre A o B, algun dels dos.
- Esdeveniment intersecció de A i B, $A \cap B$, esdeveniment que ocorre quan ocorren A i B a la vegada.
- Esdeveniment contrari de A al que ocorre quan no ocorre A, l'escriurem $\bar{A}$.

2.9 Solucions

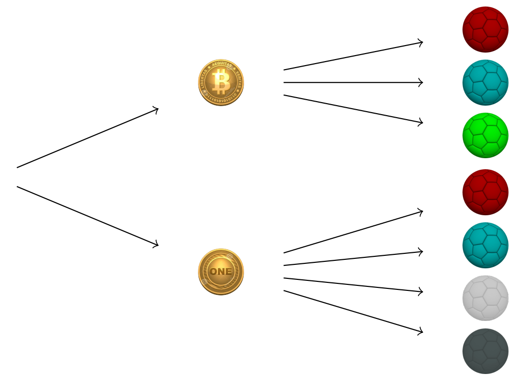
(**73**) Són aleatoris, ja que no podem conèixer per endavant els resultats, els següents experiments:

- (a) Espai mostral: $E = \{\text{Ors, Copes, Espases, Bastons}\}$
- (d) L'Espai mostral està format per cada una de les 28 fitxes que componen el dòmino.
- (e) Espai mostral: $E = \{1, X, 2\}$
- (g) Espai mostral: $E = \{\text{Vermella, Verda, Blanca, Blava}\}$

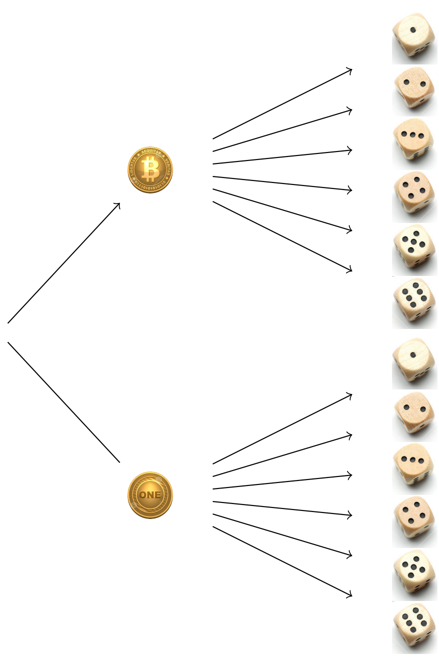
(**74**) (a)



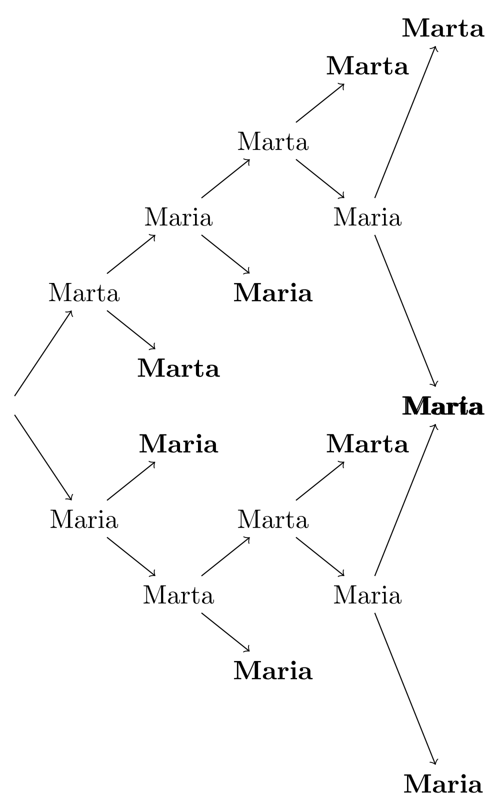
(c)



(b)



(d)



(**75**)
- (a) $P(17) = \frac{1}{37}$
- (b) $P(\text{“senar”}) = \frac{18}{37}$
- (c) $P(\text{“}2^a\text{ columna”}) = \frac{12}{37}$
- (d) $P(\text{“parell i vermell”}) = \frac{8}{37}$
- (e) $P(\text{“senar i falta”}) = \frac{9}{37}$
- (f) $P(\text{“vermell”}) = \frac{18}{37}$

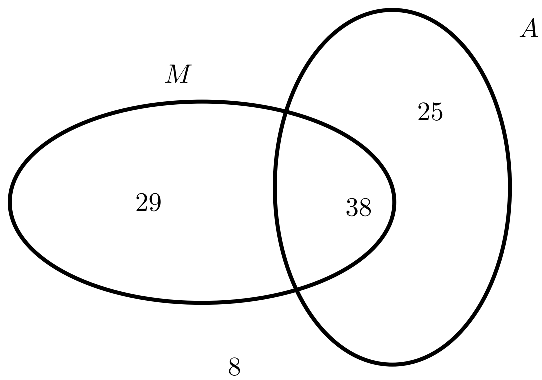
(**76**) Fer un diagrama facilita molt la resolució del problema

- (a) “Alguna de les dues”és l'esdeveniment unió,

$$P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$$

- (b) No aprovar cap és l'esdeveniment contrari a aprovar alguna de les dues (almenys una)

$$P(\text{No aprovar cap}) = 1 - P(\text{alguna de les dues}) = 1 - 0,92 = 0,08$$



$$P(M) = 0,67 \qquad P(A) = 0,63 \qquad P(M \cap A) = 0,38$$

(c) $P(\text{“només } M\text{”}) = P(M \cap \bar{A}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$

(d) $P(\text{“només } M \text{ o només A”}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$ (ó $0,92 - 0,38 = 0,54$)

(**77**) A la taula s'observa que la freqüència relativa de l'esdeveniment “caure amb la punta cap amunt”tendeix a 0,67.
Caure amb la “punta cap avall”és l'esdeveniment contrari, es pot considerar $P(\text{“punta cap avall”}) = 1 - 0,67 = 0,33$

(**78**) $A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66\}, B = \{05, 14, 23, 55\}$,
$A \cup B = \{00, 05, 11, 14, 22, 23, 44, 55, 66\},\ A \cap B = \{55\}$

(**79**) $A = \{CXX, XCX, XXC\},\ B = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC\}$,
$A \cup B = A,\ A \cap B = B,\ B = \{XXX\}$

(**80**) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},\ A \cap B = \{4, 8, 12\}$

(**81**) $P(\text{Verda}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

(**82**) $P(A) = \frac{12}{50} = 0,24 \qquad P(B) = \frac{7}{50}$

(**83**) $P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{27}{40}$

(**84**) $P(3) = \frac{7}{36}$

(**85**) En 16 de les 28 fitxes, $P = \frac{16}{28} = 0,57$

(**86**) Hi ha 6 casos possibles, $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(**87**) $P = 0,3$

(**88**) $P(A) = 1 - 0,21 = 0,79$

(**89**) (a) No poden ser certes les dues ja que són esdeveniments contraris i a més $\frac{5}{26} + \frac{11}{13} \neq 1$

(b) $P(\text{“Negra”}) = \frac{21}{26}$

(**90**) Hi ha 12 possibles menús

(a) $P(A) = \frac{1}{12}$

(b) $P(B) = \frac{1}{6}$

(**91**) $P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,29$

Capítol 3

Funcions lineals

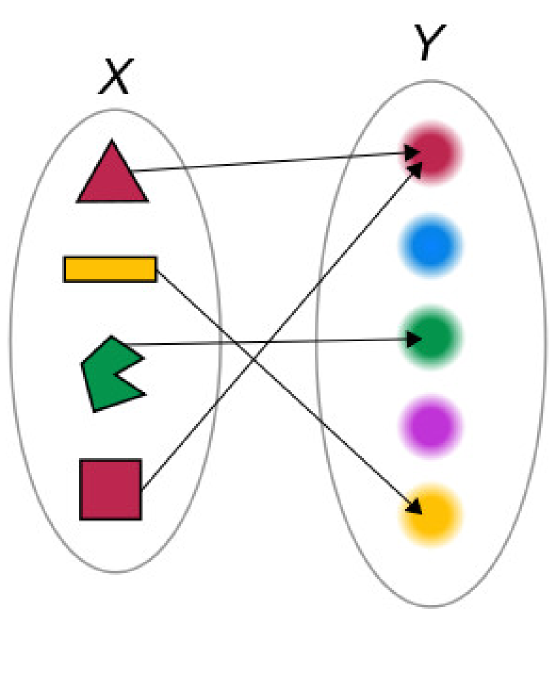
3.1 Idea Intuïtiva de funció

Una funció és una regla o procediment que estableix una determinada sortida per cada entrada. Per exemple:

- Una pedra que es deixa caure d'un edifici triga un temps diferent a arribar a terra segons el pis del qual es deixa caure. Per exemple pot prendre 2 segons si es deixa caure del 2^n pis o 4 segons si es deixa caure del $8^{\text{è}}$. Tenint la coneixença del pis del qual es deixa caure la pedra, la sortida de la funció seria el temps que triga la pedra a arribar a terra.

- En un grup de gent s'hi trobaran diverses persones als quals els agrada algun color: vermell, taronja, groc, verd, blau, indi i morat. L'entrada de la funció podria ser la persona i l'eixida seria un dels set colors. Els colors favorits són una funció de la persona al color. A una persona, per exemple, li pot agradar el vermell, mentre que a una altra pot agradar el morat. Tot i això és perfectament possible que a dues o més persones els agrade el mateix color.

- Sigui X un conjunt de quatre formes: un triangle vermell, un rectangle groc, un hexàgon verd i un quadrat vermell; i si fos Y un conjunt compost de cinc colors: vermell, blau, verd, rosa i groc. Vincular cada forma amb el seu color és una funció de X a Y: cada forma es vincula amb un color. No hi ha forma sense vincle i cap de les formes es vincula a dos o més colors. Aquesta funció s'anomenarà com la "funció del color-de-la-forma".

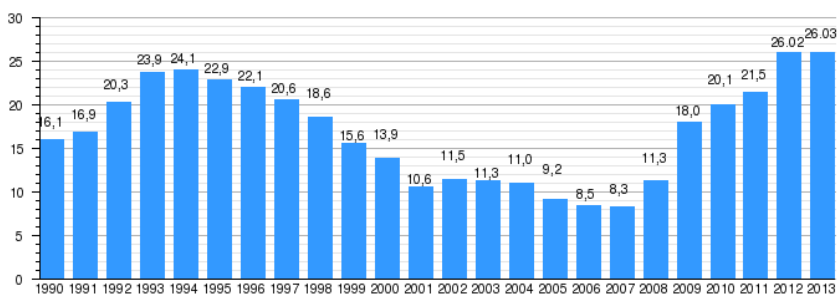


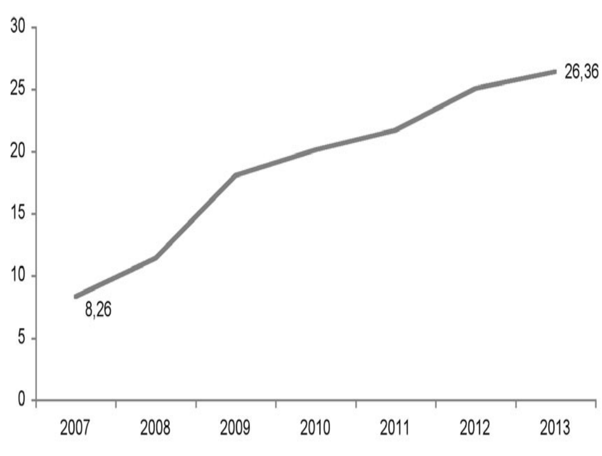
L'entrada d'una funció s'anomena argument (o antiimatge), i la sortida s'anomena valor (o imatge). Les funcions s'utilitzen com a models matemàtics que permeten interpretar millor molts fenòmens. Es tracta d'elaborar aquests models, que moltes vegades són simplificacions de fenòmens naturals o socials més comlpexos, de manera que ens permetin realitzar prediccions que, posteriorment, són confirmades o desmentides pels fets. D'aquesta manera podem saber si el model proposat és o no fiable.

Una funció relacions dues magnituds, de manera que a cada valor d'una d'elles li correspon un únic valor de l'altra.

3.2 Concepte de funció

Cal anar en compte amb la representació gràfica de les funciona perquè uns mateixos valors ens poden portar a interpretacions diferents.
Per exemple, ara ho mostrem dues gràfiques que ens mostren el mateix. L'evolució del percentatge d'atur a l'Estat Espanyol al llarg dels anys.
Si ens fixem en la segona gràfica, la interpretació que fem és que està pujant molt i molt, i no sembla que tingui intenció de baixar. En canvi, si fem la gràfica amb les mateixes dades, però amb més anys d'antelació, sembla que estiguem en un cicle que es repeteix. Però si ens fixem en els anys, ja en fa molts i preguntant a persones més grans, també recordaran la crisi dels anys 90.
D'aquí en podem treure moltes conclusions diferents.
Però el que volem deixar clar, és que cal saber interpretar els gràfics que ens mostren, tant en els mitjans de comunicació com en els llibres. Cal saber llegir, les variables, les condicions en que es prenen les dades, a on s'han pres les dades, qui ha creat el gràfic, quina intenció té el que ens ensenya el gràfic, quina és l'evolució i la tendència de la funció que estudiem, i un munt de indicadors que porta incorporada una gràfica dins.

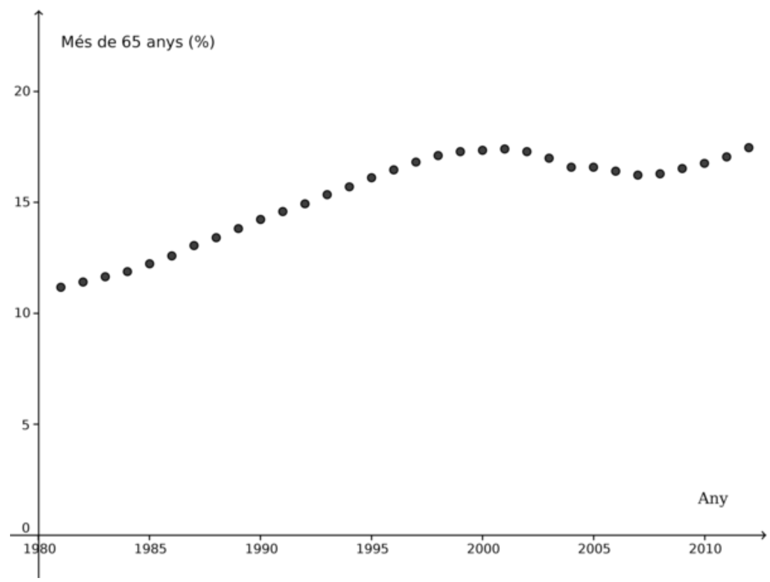




Aquest tema ens dedicarem a estudiar els índexs i les característiques de les funciona per poder-ne fer un estudi més complet més endavant.

3.3 Característiques generals de la gràfica d'una funció

En aquest capítol veurem les característiques que ens caldrà cercar per poder obtenir una representació gràfica de qualsevol funció. Una funció es pot expressar de moltes maneres, i una de les més utilitzades és la representació gràfica, ja que ens permet a primer cop d'ull veure quin és el comportament del sistema que estem estudiant.



Si, per exemple, volem veure la relació que hi ha entre l'any que som i el percentatge de gent de més de 65 anys que hi ha a la població de Catalunya, obtenim aquesta gràfica:

Quines conclusions en podem treure?
La població catalana té tendència a ser més gran? Això vol dir que no hi ha tants naixements?
Com és que a partir del 2000 hi ha una tendència a baixar? I perquè torna a pujar?
Té a veure amb la immigració? De mitjana és més jove la gent que ha immigrat?
Si anéssim més anys endarrera veuríem la mateixa tendència amb la gran immigració dels anys 60?

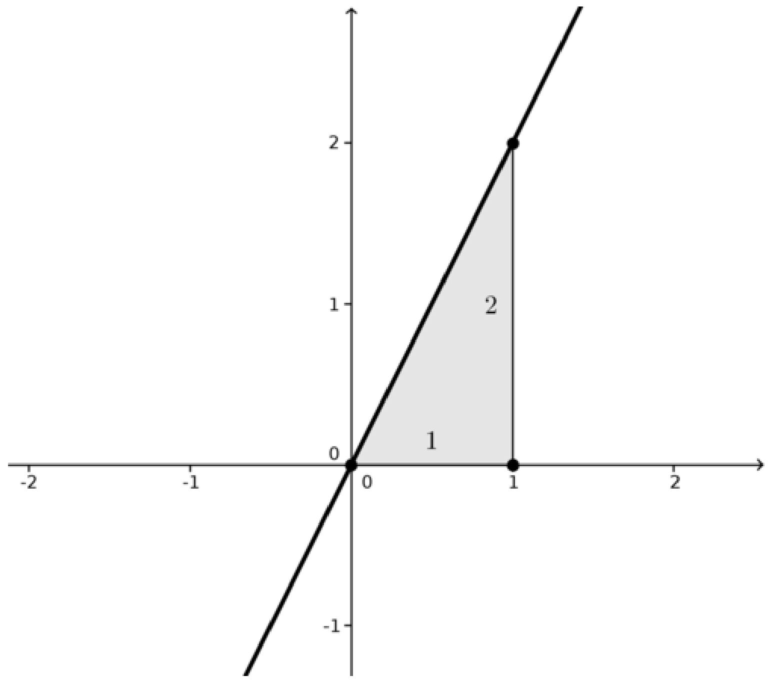
3.4 Funció Lineal

Com el seu nom indica, la funció de proporcionalitat directa o **funció lineal** relaciona dues magnituds directament proporcionals, és a dir, tals que el seu quocient és constant. Aquest quocient rep el nom de **constant de proporcionalitat**.
De la definició es dedueix que l'equació de la funció lineal és:

$$\boxed{y = m{\cdot}x}$$

on m és la constant de proporcionalitat.
La gràfica d'aquesta funció és sempre una línia recta que passa per l'origen (si $x = 0$, llavors $y = 0$), creixent si m és positiva, decreixent si m és negativa i tant més a prop de la vertical com major sigui el valor absolut de m. Per aquest motiu, m també s'anomena pendent de la recta.

En resum, les equacions del tipus $y = m \cdot x$ representen funcions lineals o de proporcionalitat directa. Si $m > 0$ és creixent. Si $m < 0$ és decreixent. Per la seva part, la constant de proporcionalitat és una mesura de la inclinació de la recta.
L'anomenem **pendent**.
En el següent exemple, podem observar la gràfica d'una funció lineal amb constant de proporcionalitat igual a 2: $m = \frac{2}{1} = 2$, per cada unitat que avancem en la direcció de l'eix de les x's, augmentem en dos unitats, l'eix de les y's.



Exemple Resolt 1

Han arribat les rebaixes i en una tenda han decidit classificar tots els seus productes en tres lots A, B i C, als que aplicaran el 20%, el 30% i el 50% de descompte, respectivament.

Si anonemen x al preu inicial i y el preu final, les taules que veus a sota mostren els canvis de preu de diversos productes dels diferents lots:

Lot A: 20%	
x	y
375,00€	300,00€
452,00€	361,60€
126,00€	100,80€
180,00€	144,00€
412,00€	329,60€

Lot B: 30%	
x	y
213,00€	149,10€
198,00€	138,60€
321,00€	224,70€
202,00€	141,40€
135,00€	94,50€

Lot C: 50%	
x	y
297,00€	148,50€
561,00€	280,50€
319,00€	159,50€
56,00€	28,00€
87,00€	43,50€

Analitzarem cada cas dividint el preu rebaixat pel preu inicial.

Lot A: 20%		
x	y	y/x
375,00€	300,00€	0,8
452,00€	361,60€	0,8
126,00€	100,80€	0,8
180,00€	144,00€	0,8
412,00€	329,60€	0,8

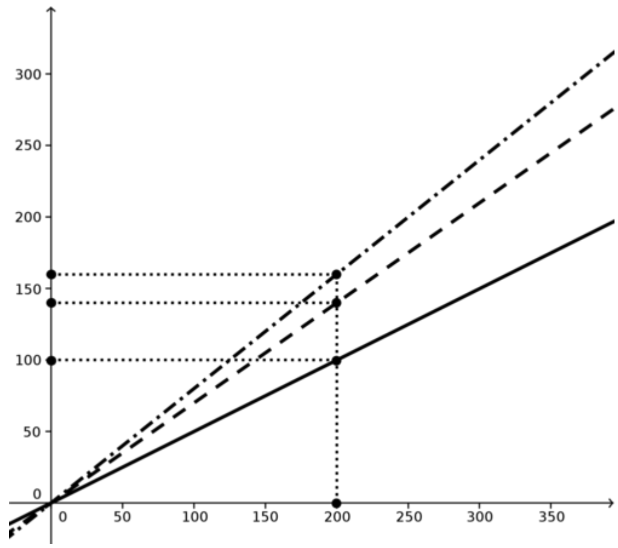
Com pots observar, en el primer lot tots els quocients són iguals. Com hem vist, això significa que el preu rebaixat és **directament proporcional** al preu inicial y, en aquest cas, la constant de proporcionalitat és 0,8. Per tant, per al lot A tenim: $y = 0,8 \cdot x$.

Lot B: 30%		
x	y	y/x
213,00€	149,10€	0,7
198,00€	138,60€	0,7
321,00€	224,70€	0,7
202,00€	141,40€	0,7
135,00€	94,50€	0,7

Lot C: 50%		
x	y	y/x
297,00€	148,50€	0,5
561,00€	280,50€	0,5
319,00€	159,50€	0,5
56,00€	28,00€	0,5
87,00€	43,50€	0,5

En els altres dos lots succeeix de forma semblant, però en cada cas la constant de proporcionalitat és diferent de manera que:

Per al lot B tenim: $y = 0,7 \cdot x$
Per al lot C tenim: $y = 0,5 \cdot x$
En qualsevol cas totes tenen la forma: $y = m \cdot x$. Si analitzem les gràfiques de les tres funcions, podem veure que les tres són **línies rectes que passen per l'origen**, amb major inclinació com més gran és la constant de proporcionalitat. Si prenem el valor $x = 200€$ observem que en el lot $A \Rightarrow y = 160,00€$; en el lot $B \Rightarrow y = 140,00€$ i en el lot $C \Rightarrow y = 100,00€$.



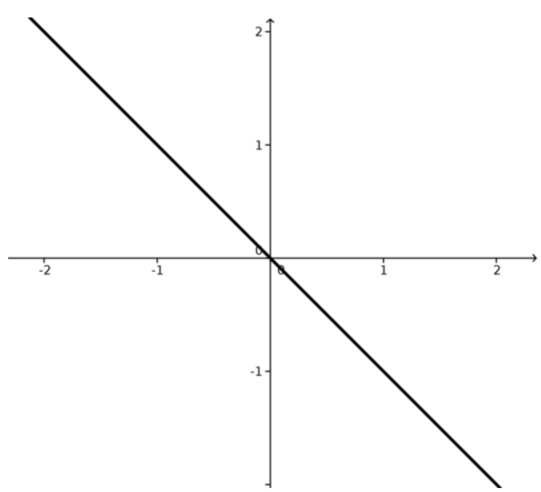
Exemple Resolt 2

Esbrina si les funcions definides per les dades de les taules adjuntes són o no són funcions lineals. En cas afirmatiu, determina el seu pendent i dibuixa la seva gràfica: Per determinar si és lineal, calculem tots els quocients entre els valors de y i de x.

x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

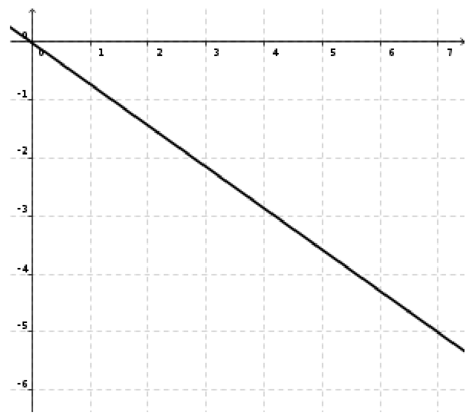
x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

En el primer cas, com que no tots els quocients són iguals, no es tracta d'una funció de proporcionalitat directa i, per tant, no és una funció lineal. En canvi, en el segon cas, els quocients són tots iguals, per tant, les magnituds que representen x i y són directament proporcionals i la funció que les relaciona sí és lineal. El pendent és la constant de proporcionalitat $m = -1$ i la gràfica és:



Exemple Resolt 3

Determina el pendent i l'equació de la funció de la gràfica adjunta:



Per ser una recta que passa per l'origen és una funció lineal i la seva equació és de la forma $y = m \cdot x$. Com que és decreixent, m és negativa.
Per trobar m, localitzem algun punt de la recta amb les dues coordenades enteres. En aquest cas, el punt pot ser $(7, -5)$. El pendent es calcula dividint la segona coordenada per la primera, així doncs, $m = -\frac{5}{7}$ i l'equació de la funció és

$$y = -\frac{5}{7}x$$

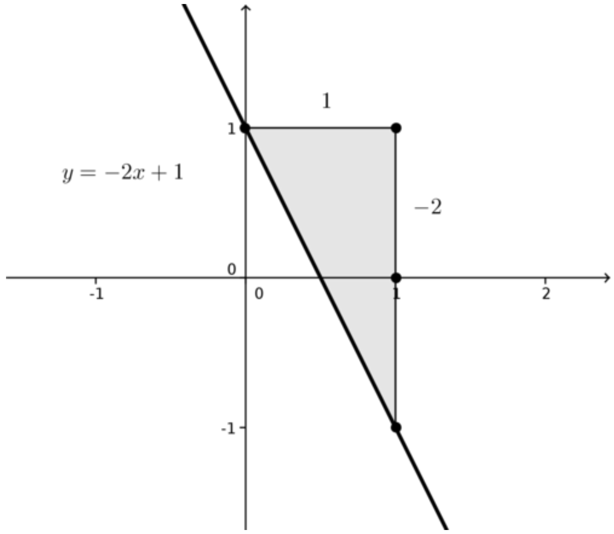
3.5 Funció afí

Podem considerar una funció afí com una funció lineal a la que se li han aplicat certes condicions inicials. Encara que no representa a dues magnituds directament proporcionals, existeix entre elles certa proporcionalitat com pots veure a les imatges adjuntes. L'equació de la funció afí és:

$$\boxed{y = m \cdot x + n}$$

on m segueix representant aquesta certa proporcionalitat i n representa les condicions inicials. La seva gràfica és una línia recta que talla l'eix y en el punt n (si $x = 0$, llavors $y = n$). Per aquest motiu també es diu que n és l'ordenada en l'origen de la recta. La m té el mateix significat que en les funcions lineals.

En resum, les equacions del tipus $y = mx + n$ representen funcions afins.
Si $m > 0$ és creixent.
Si $m < 0$ és decreixent.
El pendent es calcula ara respecte a l'ordenada a l'origen. En el cas de la gràfica següent obtenim que el pendent és -2.



Exemple Resolt 4

En una empresa de lloguer de vehicles cobren 50€ pel contracte de lloguer més $0,20$€ per quilòmetre recorregut. Volem trobar una equació que ens permeti calcular amb facilitat el preu d'un lloguer en funció de la distància recorreguda:

L'empresa ens proporciona la taula següent perquè ens puguem fer una idea del preu.

x (km)	y (€)
0	50,00€
100	70,00€
200	90,00€
300	110,00€
400	130,00€

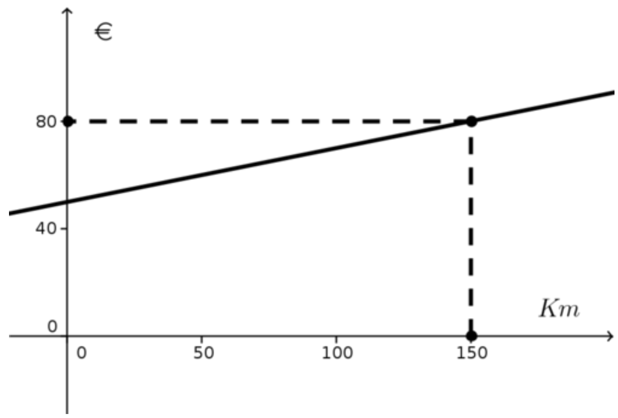
El primer que observem és que si dupliquem el nombre de km, el preu no es duplica: **les magnituds no són directament proporcionals**. Si analitzem amb més detall la situació, ens adonem que si descomptem en cada cas el valor inicial i dividim el preu per la distància obtenim sempre el mateix quocient, és a dir, **el preu (descomptat el cost inicial) si que és directament proporcional a la distància**. El valor obtingut és la constant de proporcionalitat com en el cas anterior:

x (km)	y (€)	$y-50$	$(y-50)/x$
0	50,00€		
100	70,00€	20,00€	0,20
200	90,00€	40,00€	0,20
300	110,00€	60,00€	0,20
400	130,00€	80,00€	0,20

Per tant, $y-50=0,2\cdot x$, s'on es dedueix que:

$$y=0,2\cdot x+50$$

que té la forma $y=mx+n$. Igual que les funcions lineals, la m representa el pendent i ara la n representa el punt on la recta tall l'eix de les y tal i com es pot veure en el següent gràfic:

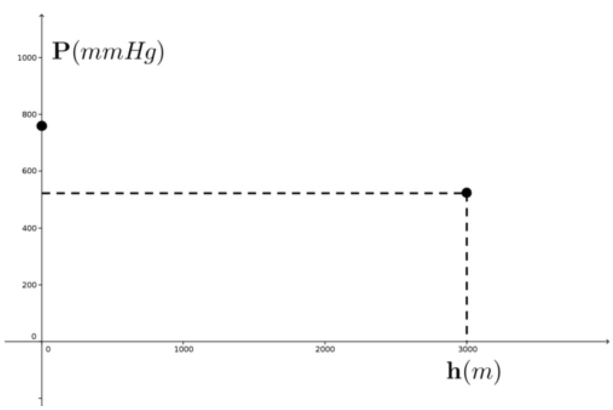


3.6 Interpolació Lineal

La pressió atmosfèrica varia amb l'altitud respecte al nivell del mar. Concretament, a mesura que l'altitud augmenta, la pressió atmosfèrica disminueix.
La següent taula ens indica els valors de la pressió atmosfèrica a nivell del mar i a una altitud de 3000 metres.

h(m)	0	3 000
P(mmHg)	760	523

Quin valor podem estimar per a la pressió atmosfèrica en un punt situat a 1000 metres d'altitud?
Si representem gràficament els valors de la taula, obtenim dos punts.



Ens diuen que la pressió atmosfèrica disminueix amb l'altitud, però no ens informen de com es produeix aquesta disminució, és a dir, no podem dibuixar la gràfica de la funció $P = f(h)$ que correspon a l'interval $[0, 3000]$ perquè no sabem de quina funció es tracta.
Per resoldre situacions d'aquest tipus s'utilitza un procediment conegut amb el nom d'**interpolació lineal**. Si suposem que la pressió disminueix linealment amb l'altitud, la funció $P = f(h)$ serà lineal i la seva expressió algèbrica serà del tipus $f(h) = mh + n$ o, el que és el mateix, $P = mh + n$.
Així, estem en condicions de trobar l'expressió algèbrica d'aquesta funció, ja que coneixem les coordenades de dos dels seus punts: $(0, 760)$ i $(3000, 523)$. Per trobar m i n resolem el sistema:

$$\begin{cases} 760 = m \cdot 0 + n \\ 523 = m \cdot 3000 + n \end{cases}$$

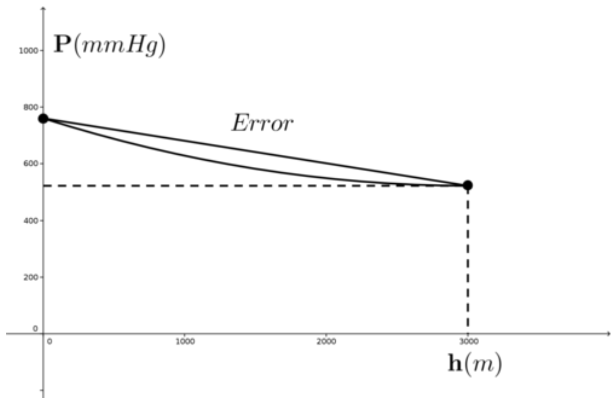
La solució és $m = -\frac{79}{1\,000}$ i $n = 760$.
Per tant, l'equació de la funció que hem considerat és:

$$f(h) = -\frac{79}{1\,000}h + 760$$

Si la disminució de la pressió atmosfèrica amb l'altitud fos lineal, el valor d'aquesta pressió a $1\,000m$ seria de:

$$f(1\,000) = -\frac{79}{1\,000} \cdot 1\,000 + 760 = 681 \Longrightarrow P = 681mmHg$$

El més probable és que aquesta disminució no sigui lineal i, per tant, que el valor que hem trobat no sigui l'exacte. Per aquest motiu, el problema ens demana una **estimació** del valor de la pressió atmosfèrica a $1\,000m$ d'altitud. Si observem la següent gràfica, podem fer-nos una idea gràfica de l'error que cometem quan unim els dos punts mitjançant un traç rectilini, en lloc de fer-ho amb un traç curvilini. Oberseva que, en aquest cas, l'error que cometem és per excés i no per defecte.



En general, si a partir d'una taula o una gràfica ens donen dos parells de valors, (x_1, y_1) i (x_2, y_2), corresponents a dues magnituds x i y que depenen una de l'altra, podem estimar mitjançant la interpolació lineal el valor y_0 corresponent a un valor $x_0 \in (x_1, x_2)$. N'hi ha prou a determinar l'expressió algèbrica de la funció lineal $f(x) = mx + n$ la gràfica de la qual passa pels punts de coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2) i trobar $f(x_0)$.

Exemple Resolt 5

En una habitació que es troba a una temperatura de $20°C$ hem retirat del foc mig litre d'aigua bullint. Mesurem la temperatura de l'aigua després de 10, 30 i 50 minuts, i obtenim les dades de la taula següent:

Temps (min)	10	30	50
Temperatura ($°C$)	85	50	36

Estima, per interpolació lineal, la temperatura de l'aigua 25 i 35 minuts després d'haver-la retirat del foc.

Observa que es verifica $10 < 25 < 30$. Per tant, la funció que ens determina la variació lineal de temperatura T de l'aigua en funció del temps t transcorregut haurem de trobar-la per a l'interval $[10, 30]$, és a dir, a partir dels parells de valors $(10, 85)$ i $(30, 50)$.
Si la representem com a $f(t) = mt + n$, es verifiquen alhora aquestes igualtats:

$$\begin{cases} 85 = 10m + n \\ 50 = 30m + n \end{cases}$$

La solució d'aquest sistema és $m = -\frac{7}{4}$ i $n = \frac{205}{2}$.
La funció lineal d'interpolació és $f(t) = -\frac{7}{4}t + \frac{205}{2}$.
Per tant:

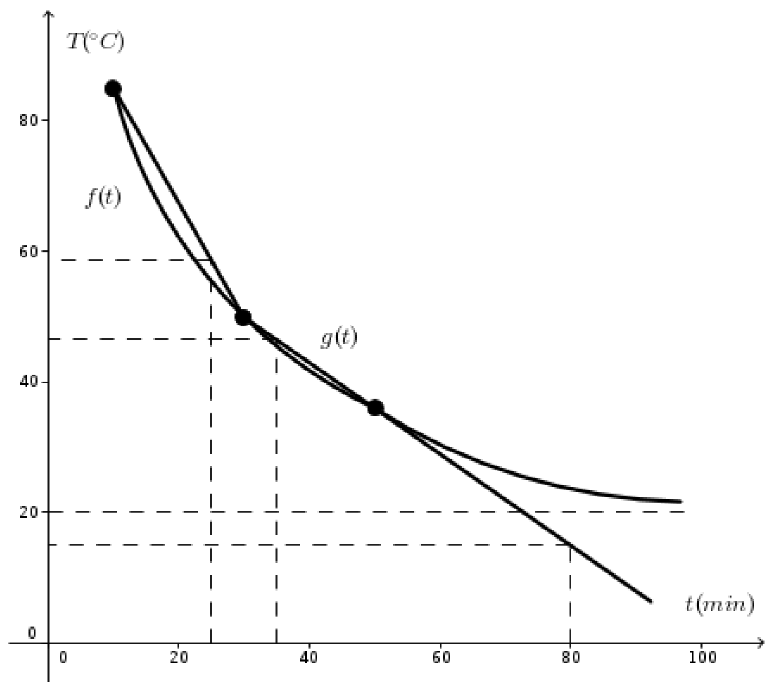
$$f(25) = -\frac{7}{4} \cdot 25 + \frac{205}{2} = 58,75 \longrightarrow T = 58,75°C$$

Podem estimar que, després de 25 minuts, la temperatura de l'aigua s'aproparà a $59°C$.
Repetim el procés per a $t = 35min$. En aquest cas, $30 < 35 < 50$, de manera que hem de trobar la funció lineal d'interpolació, que representem ara per $g(t) = mt + n$, a partir dels parella de valors $(30, 50)$ i $(50, 36)$.
Procedint com en el cas anterior, obtenim;

$$g(t) = -\frac{7}{10}t + 71 \longrightarrow g(35) = 46,5 \longrightarrow T = 46,5°C$$

Transcorreguts 35 minuts, la temperatura de l'aigua serà aproximadament de $46°C$.
Amb les dades que tenim, podem plantejar-nos una estimació de la temperatura de l'aigua quan hagin

transcorregut 80 minuts?
Com que el 80 no està inclòs en l'interval del temps $[10, 50]$, estimarem la temperatura de l'aigua als 80 minuts per **extrapolació**. Suposarem que a partir dels 50 minuts la temperatura segueix disminuint linealment amb el temps, de la mateixa manera que ho fa entre els 30 i els 50 minuts.
Amb aquestes consideracions, obtenim $g(80) = 15 \rightarrow T = 15°C$.
Evidentment, l'estimació obtinguda no és possible. Si tenim en compte que la temperatura de l'habitació és de $20°C$, la temperatura de l'aigua tendirà a estabilitzar-se al voltant dels $20°C$, sense assolir mai temperatures més baixes.
Segurament, si l'extrapolació la realitzem, per exemple, per a un temps de 55 minuts, no gaire allunyat de 50, obtindrem una temperatura molt propera a la real.
A la següent gràfica hem realitzat una representació gràfica aproximada de la situació que planteja aquest exemple.



És important analitzar la validesa dels resultats obtinguts a partir d'interpolacions o extrapolacions i tenir sempre en compte totes les condicions en què es produeix el fenomen que s'estudia. Per regla general, les estimacions per extrapolació són menys fiables que les que s'obtenen per interpolació.
La interpolació lineal també s'utilitza en funciona amb expressions algèbriques complexes. Com a conseqüència de la dificultat dels càlculs que se'n deriven, els seus valors es recullen en taules. Els valors intermedis que no es troben a les taules s'estimen per interpolació lineal.

3.7 Variables dependents i independents

L'expressió **variables dependents** i **independents** es refereix a valors que varien de forma correlacionada entre elles. Les variables dependents són aquelles que s'observa que varien en resposta a les variacions de les variables independents. Les variables independents són aquelles que es manipulen de forma deliberada per a provocar el canvi de les variables dependents. En resum, "si es dona x, llavors resulta y", on x representa les variables independents i y representa les variables dependents.

Quan es dissenyen experiments, les variables independents són aquells valors que es seleccionen i es controlen a l'experiment per tal de determinar la seva relació amb un fenomen observable, (la variable dependent). En aquest tipus d'experiments, es fa un intent de trobar proves de que els valors de la variable independent determinen els valors de la variable dependent (aquella que s'està mesurant). La variable independent es pot canviar a voluntat, i els seus valors no representen un problema que requereixi explicació en l'anàlisi, sinó que es prenen simplement tal com es donen. Per altra banda, la variable dependent, normalment no es pot controlar directament.

En resum:

- Les variables independents responen a la pregunta: "Què es farà variar?"
- Les variables dependents responen a la pregunta: "Què s'observarà?"

Exemples:

- Si s'hagués de mesurar la influència de diferents quantitats d'adobs naturals en el creixement de les plantes, la variable independent hauria de ser la quantitat d'adob que es fa servir (el factor que es variarà en fer diferents experiments). Les variables dependents haurien de ser el creixement en alçada i/o en massa de la planta (els factors que en resulten influenciats per l'efecte de l'adob) i hauríem de controlar el tipus de planta, el tipus d'adob, la quantitat de llum solar que rep la planta, etc.
- Si s'estudia com afecten diferents dosis d'una vacuna amb els efectes secundaris, es podria comparar la freqüència i intensitat dels efectes secundaris (les variables dependents) amb les diferents dosis de la vacuna (la variable independent) que s'administren, i provar de extreure'n una conclusió.
- Per mesurar l'efecte de la educació sobre la qualitat de la feina on es treballa en una família, les variables dependents podrien ser l'horari laboral, la distància de casa a la feina i la relació entre els companys, i una variable independent podria ser el nivell d¿educació dels individus que composen la unitat familiar (per exemple el nivell acadèmic).

Una variable independent és qualsevol dels arguments, és a dir, "entrades", d'una funció. En canvi, la variable dependent és el valor de la funció, és a dir, el "resultat", de la funció. Així, si es té una funció $f(x)$, llavors x és la variable independent, i $f(x)$ és la variable dependent. La variable dependent, depèn de la variable independent, d'aquí en ve el nom.

Si per exemple, tenim la funció $y = f(x) = -3x + 1$, prenem valors de la $x = -2$ i de $x = 3$:

$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = -3 \cdot (-2) + 1 = 6 + 1 = 7 \qquad x = 3 \longrightarrow f(3) = -3 \cdot (3) + 1 = -9 + 1 = -8$$

Obtenim el valor 7 a partir del -2. El 7 s'anomena la **imatge** del -2. I el -8 la imatge del 3.

En canvi, si tenim els valors y i en volem saber el valor de la x corresponent, estarem parlant de les **antiimatges**.

Si calculem les antiimatges de 0 i -2 de la mateixa funció d'abans:

$$f(x) = -3x + 1 = 0 \to -3x = -1 \to x = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \,|f(x) = -3x + 1 = -2 \to -3x = -3 \to x = \frac{-3}{-3} = 1$$

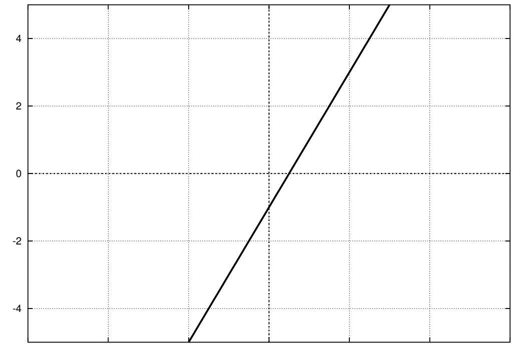
Les rectes es representen gràficament mitjançant els eixos de coordenades. L'eix de les x's s'anomena l'eix d'abscisses i l'eix de les y's s'anomena l'eix d'ordenades.

EXEMPLE:

Anem a veure un exemple de com representar gràficament una recta. Prenem $y = 2x - 1$.

Això vol dir que el pendent $m = 2$. Com que és positiu serà creixent. A més, talla amb l'eix de les y's pel punt $(0, -1)$. Si fem una taula de valors, d'almenys 5 punts, obtenim:

x	$y = 2x - 1$	
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$	$(2, 3)$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$	$(-1, -3)$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$	$(-2, -5)$



3.8 Exercicis

(**1**) Posa quatre exemples que se t'ocurreixin de variables dependents i variables independents.

Representa gràficament les següents funcions:

(**2**) $f(x) = 2x$

(**3**) $f(x) = -x$

(**4**) $f(x) = -3x$

(**5**) $f(x) = 4x + 2$

(**6**) $f(x) = -2x + 2$

(**7**) $f(x) = x + 3$

(**8**) $f(x) = -x - 3$

(**9**) $f(x) = 6x - 3$

(**10**) $f(x) = -4x + 5$

(**11**) Calcula la imatge del punts 2, 3 i -5 de les següents funcions:

(a) $f(x) = -x - 4$
(b) $f(x) = 6x - 2$
(c) $f(x) = -3x + 1$
(d) $f(x) = 2x - 8$
(e) $f(x) = 3x - 9$
(f) $f(x) = -x + 1$

(**12**) Se sap que la distància recorreguda per un vianant, en metres, a velocitat constant és proporcional a la durada del trajecte en segons. Un vianant ha recorregut 12 metres en 7 segons.

(a) Escriu la funció associada a aquesta situació.
(b) Representa gràficament aquesta funció.

(**13**) Una aixeta oberta totalment raja 1 litre d'aigua cada 4 segons:

(a) Construeix una taula de valors que relacioni el temps i la capacitat.
(b) Escriu la funció associada a aquesta situació.
(c) Representa gràficament aquesta funció.
(d) Quina quantitat d'aigua haurà rajat en 20 minuts?
(e) Quant de temps ha de passar per omplir una banyera de $160cm$ de llarg, $70cm$ d'ample i $50cm$ de profunditat?

(**14**) Troba l'equació de les rectes següents:

(a) Té pendent 3 i ordenada en l'origen -7.
(b) Té pendent 5 i passa pel punt $(-1, -2)$.
(c) Passa pels punts $A(2, 3)$ i $B(-1, 6)$.

(**15**) Troba l'equació de les rectes següents:

(a) Té pendent $-\frac{1}{2}$ i ordenada en l'origen 6.
(b) Té pendent $\frac{2}{5}$ i passa pel punt $(1, 2)$.
(c) Passa pels punts $A(1, 3)$ i $B(3, -1)$.

(**16**) Troba l'equació de les rectes següents:

(a) Té pendent $\frac{7}{5}$ i ordenada en l'origen $\frac{3}{5}$.
(b) Té pendent $\frac{8}{3}$ i passa pel punt $(1, 3)$.
(c) Passa pels punts $A(2, -3)$ i $B(5, 0)$.

(**17**) Donats els punts $A(1, 3)$, $B(2, 0)$ i $C(-1, 9)$, comprova que estan alineats.

(**18**) En un dipòsit mig ple, l'altura fins on arriba l'aigua és de $8m$. Es vol omplir del tot amb una aixeta que aconsegueix pujar l'altura $60cm$ cada hora. Escriu la fórmula de la funció que permet calcular l'altura de l'aigua segons el temps que passa des que s'obre l'aixeta.

(**19**) Indica si les següents parelles de rectes són paral·leles o es tallen.

(a) $y = 2x - 5$ i $y = 4x - 10$

(b) $y = -3x + 3$ i $y = -3x - 10$

(c) $y = x - 1$ i $y = 4x - 4$

(**20**) Donada la recta d'equació $y = -2x + 4$,

(a) Escriu les equacions de dues rectes que siguin paral·leles a la donada.

(b) Escriu les equacions de dues rectes que no siguin paral·leles a la donada.

(c) Escriu les equacions de dues rectes amb la mateixa ordenada en l'origen que la donada.

(**21**) Troba l'equació de la recta que passa pel punt $A(2, -5)$ i és paral·lela a la recta d'equació $y = 7x - 2$.

(**22**) Troba les equacions de les rectes que, passant pel punt $A(1, -5)$, són paral·leles als eixos de coordenades.

(**23**) Troba l'equació de la recta paral·lela a la recta d'equació $y = 4x - 3$ en els casos següents:

(a) Que tingui l'ordenada en l'origen igual a 5.

(b) Que passi per l'origen de coordenades.

(c) Que passi pel punt $A(1, 3)$.

(**24**) La recta d'equació $y = 2x - 4$ determina un triangle amb els eixos de coordenades. Calcula l'àrea d'aquest triangle.

(**25**) Calcula la intersecció entre les rectes $y = -2x + 4$ i la recta $y = 3x - 2$ gràficament. Després comprova el resultat resolent el sistema d'equacions.

(**26**) Pren qualsevol sistema d'equacions del capítol de sistemes d'equacions i resol el sistema gràficament.

3.9 Solucions

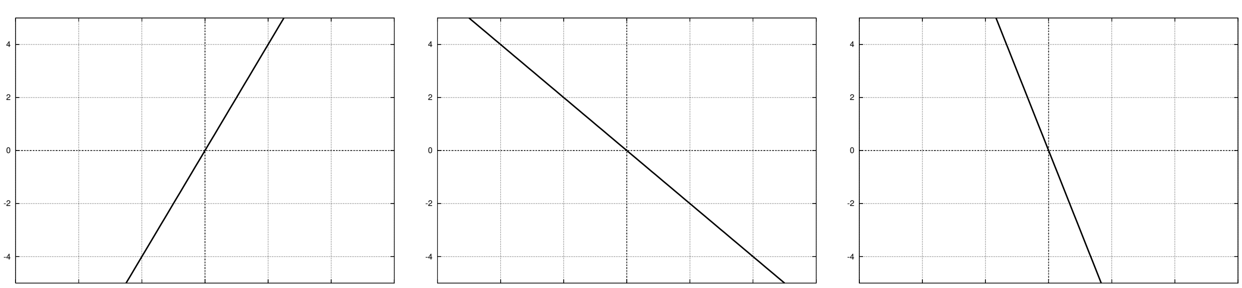


Figura 3.1: (2) $f(x) = 2x$, (3) $f(x) = -x$, (4) $f(x) = -3x$

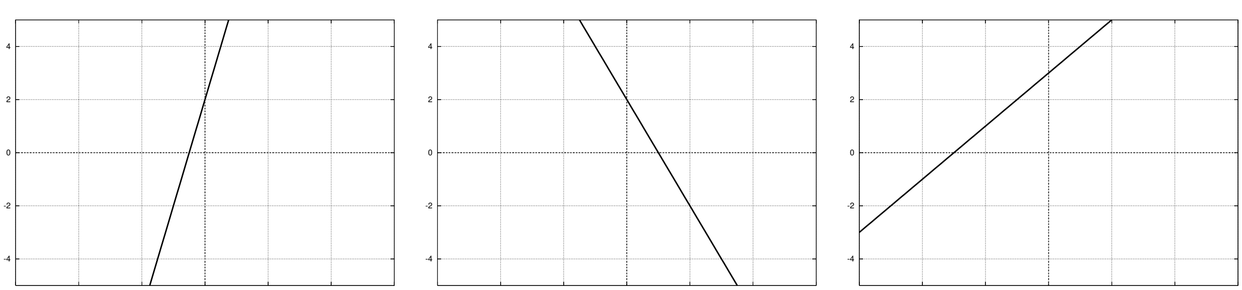


Figura 3.2: (5) $f(x) = 4x + 2$, (6) $f(x) = -2x + 2$, (7) $f(x) = x + 3$

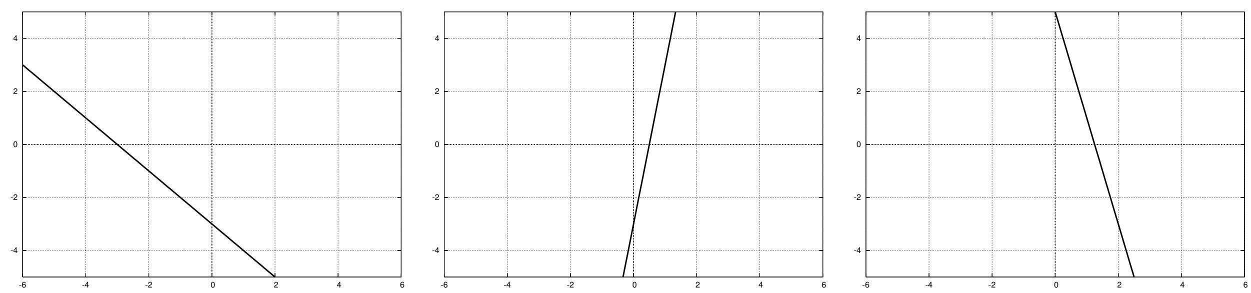


Figura 3.3: (8) $f(x) = -x - 3$, (9) $f(x) = 6x - 3$, (10) $f(x) = -4x + 5$

(**11**) (a) $f(2) = -6,\ f(3) = -7$ i $f(-5) = 1$

(b) $f(2) = 10,\ f(3) = 16$ i $f(-5) = -32$

(c) $f(2) = -5,\ f(3) = -8$ i $f(-5) = 16$

(d) $f(5) = 2,\ f(\frac{11}{2}) = 3$ i $f(\frac{3}{2}) = -5$

(e) $f(\frac{11}{3}) = 2,\ f(4) = 3$ i $f(\frac{4}{3}) = -5$

(f) $f(-1) = 2,\ f(-2) = 3$ i $f(6) = -5$

(**12**) $y = \frac{12}{7}x$

(**13**) (b) $y = \frac{1}{4}x$

(d) $y = \dfrac{1}{4}20min\dfrac{60s}{1min} = 300l$

(e) $V = 560dm^3 = 560l$

$\frac{560l}{4\frac{l}{s}} = 140s = 2min\ 20s$

(**14**) (a) $y = 3x - 7$

(b) $y = 5x + 3$

(c) $y = -x + 5$

(**15**) (a) $y = -\frac{1}{2}x + 6$

(b) $y = \frac{-2x+12}{5}$

(c) $y = -2x + 5$

(**16**) (a) $y = \frac{7x+3}{5}$

(b) $y = \frac{8x+1}{3}$

(c) $y = x - 5$

(**17**) $y = 7x - 19$

(**18**) $y = \frac{1}{6000}t + 8$

(**19**) (a) Es tallen

(b) Paral·leles

(c) Es tallen

(**20**) (a) $y = -2x + 1$ i $y = -2x - 8$

(b) $y = 3x - 2$ i $y = -5x + 1$

(c) $y = -7x + 4$ i $y = 8x + 4$

(**21**) $y = 7x - 19$

(**22**) $y = -5$ i $x = 1$

(**23**) (a) $y = 4x + 5$

(b) $y = 4x$

(c) $y = 4x - 1$

(**24**) $4u^2$

(**25**) $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

Capítol 4

Sistemes d'equacions de primer grau

Tota equació lineal $ax + by = c$, per exemple $4x - 3y = 5$ expressa una recta i, per tant, els punts que la satisfan (x, y), per exemple $(2, 1)$, $(-1, -3), ...$, tots pertanyen a aquesta recta.
Al resoldre un sistema format per dues equacions lineals estem buscant si les dues rectes tenen punts comuns, i són els anomenats punts d'intersecció.

DISCUSSIÓ D'UN SISTEMA:
Al resoldre el sistema, pot passar:

(**1**) Que trobem només un valor per la x i un altre per la y, per tant, el sistema només té una solució: **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT (SCD).** El punt $P(x, y)$ serà l'únic punt de coincidència entre les dues rectes i les dues rectes es tallen en aquest punt $P(x, y)$, per tant, són rectes secants.

(**2**) Que se'ns anul·lin les variables i queda una igualtat que indica una veritat matemàtica $(0 = 0)$, llavors el sistema té moltes solucions (infinites): **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT (SCI)** Les dues rectes tenen tots els punt comuns, és a dir, les dues rectes coincideixen perquè són la mateixa recta.

(**3**) Si se'ns anul·len les variables i queda una igualtat que indica una mentida matemàtica $(ex : 8 = 0)$ llavors el sistema no té solució **SISTEMA INCOMPATIBLE (SI)** les dues rectes no tenen cap punt en comú perquè són rectes paral·leles.

Tindrem maneres diferents per poder resoldre els sistemes d'equacions el **mètode de Substitució**, el **mètode d'Igualació** i el **mètode de Reducció**:

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

Si tenim el següent sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1^r. Escollim una de les variables d'una de les dues equacions. En aquest cas, prenem la y de la segona equació i la aïllem. $y = 7 - 2x$
2^n. **Substituïm** el valor de la y a l'altra equació. $4x - 3(7 - 2x) = 9$
3^r. Resolem l'equació de primer grau que ens queda:

$$\begin{aligned} 4x - 21 + 6x &= 9 \\ 4x + 6x &= 9 + 21 \\ 10x &= 30 \\ x &= \frac{30}{10} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

4^t. Substituïm el valor de la x trobat a la primera equació aïllada: $y = 7 - 2(3) = 7 - 6 = 1$
$5^{è}$. Ja tenim la solució del sistema, $x = 3$, $y = 1$.
El punt d'intersecció entre les dues rectes és (3, 1). Només té una solució: Sistema compatible determinat (SCD), per tant, les rectes són secants i es tallen en el punt (3, 1).

MÈTODE D'IGUALACIÓ

Si tenim el següent sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1^r. Escollim una de les variables i l'aïllem a les dues equacions. Ens quedaria així:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \longrightarrow y = \dfrac{4x-9}{3} \\ 2x + y = 7 \longrightarrow y = 7 - 2x \end{cases}$$

2^n. **Igualem** el valor de la y de les dues equacions: $\dfrac{4x-9}{3} = 7 - 2x$

3^r. Resolem l'equació de primer grau que ens queda:

$$\begin{aligned} \frac{4x-9}{3} &= 7 - 2x \\ 4x - 9 &= 3(7 - 2x) \\ 4x - 9 &= 21 - 6x \\ 4x + 6x &= 21 + 9 \\ 10x &= 30 \\ x &= \frac{30}{10} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

4^t. Substituïm el valor de la x trobat a la primera equació aïllada: $y = 7 - 2(3) = 7 - 6 = 1$

$5^è$. Ja tenim la solució del sistema, $x = 3,\ y = 1$.

El punt d'intersecció entre les dues rectes és (3, 1). Només té una solució: Sistema compatible determinat (SCD), per tant, les rectes són secants i es tallen en el punt (3, 1).

MÈTODE DE REDUCCIÓ

Si tenim el següent sistema

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1^r. Escollim una de les variables. Llavors multipliquem les equacions pels coeficients de les variables escollides, però invertint l'ordre i canviant-ne un de signe, és a dir, si escollim la variable y, tenim els coeficients -3 i 1. Doncs, multipliquem per 1 i 3 les equacions respectivament:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \longrightarrow \times 1 \longrightarrow 4x - 3y = 9 \\ 2x + y = 7 \longrightarrow \times 3 \longrightarrow 3(2x + y) = 3 \cdot 7 \longrightarrow 6x + 3y = 21 \end{cases}$$

2^n. Ara, **Sumem** les dues equacions per anular el terme en la variable y i **reduir** les equacions a una equació d'una sola incògnita.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ \underline{6x + 3y = 21} \end{cases}$$

$$10x + 0y = 30 \longrightarrow\ 10x = 30$$

3^r. Resolem l'equació de primer grau que ens queda:

$$10x = 30 \longrightarrow x = \frac{30}{10} \longrightarrow x = 3$$

4^t. Substituïm el valor de la x trobat a qualsevol de les dues equacions:

$$2(3) + y = 7 \longrightarrow\ 6 + y = 7 \longrightarrow y = 7 - 6 \longrightarrow y = 1$$

$5^è$. Ja tenim la solució del sistema, $x = 3,\ y = 1$.

El punt d'intersecció entre les dues rectes és (3, 1). Només té una solució: Sistema compatible determinat (SCD), per tant, les rectes són secants i es tallen en el punt (3, 1).

4.1 Exercicis i Problemes

(1) En un corral hi ha conills i gallines. Aquests viuen en una gàbia molt gran i es poden moure lliurement podent menjar herba i insectes. El número de caps és de 41 i hi ha 124 potes. Quantes gallines i conills hi ha en el corral?

(2) Una pizzeria que treballa només amb productes ecològics té dos tipus de pizza, la margarita a 3€ i la de quatre formatges a 5€. Ahir a la nit van vendre 53 pizzes i van recaptar 203€. Quantes pizzes de cada classe s'han venut?

(3) Una empresa que envasa ampolles d'aigua sense afegir-hi gas carbònic, envasa ampolles de 2 i 6 litres. Si en una setmana han envasat 5570 litres en 1697 ampolles, quantes ampolles de 2 i 6 litres han utilitzat?

PROBLEMA RESOLT 1

Un noi compra 2 bolígrafs i 8 llibretes per 36€. i un amic seu compra 4 bolígrafs i 6 llibretes, exactament iguals per 32€. Quin és el preu dels dos articles?

1^r. **Cal llegir tot el problema fins el final i preguntar-nos què ens demana**. Quin és el preu dels dos articles?
2^n. **Definir les variables:** x = preu del bolígraf, y = preu de la llibreta
3^r. **Plantejament algebraic**: Llegir de nou l'exercici i traduir-lo a llenguatge algebraic:

Un noi compra 2 bolígrafs i 8 llibretes per 36€. $2x + 8y = 36$
Un amic seu compra 4 bolígrafs i 6 llibretes, exactament iguals per 32€: $4x + 6y = 32$

4è. **Resoldre el sistema**. En aquest cas ho farem pel Mètode de Reducció eliminant la variable x:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+8y=36 \longrightarrow \times(-4) \longrightarrow -4(2x+8y) = -4\cdot 36 \longrightarrow -8x-32y=-144 \\ 4x+6y=32 \longrightarrow \times 2 \longrightarrow 2(4x+6y)=2\cdot 32 \longrightarrow 8x+12y=64 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcr} -8x-32y & = & -144 \\ 8x+12y & = & 64 \\ \hline 0x-20y & = & -80 \end{array} \longrightarrow -20y=-80 \longrightarrow y=\frac{-80}{-20} \longrightarrow y=4$$

Substituïm el valor de la x trobat a qualsevol de les dues equacions:

$$2x+8(4)=36 \longrightarrow 2x+32=36 \longrightarrow 2x=36-32 \longrightarrow x=\frac{4}{2} \longrightarrow x=2$$

La solució del sistema d'equacions és : $x = 2,\ y = 4$.

5è. **Escriure la Solució del Problema:**

RESPOSTA: El preu del bolígraf és de 2€ i el de la llibreta de 4€

(4) Un fabricant de pilotes de voleibol obté un benefici d'11€ per cada pilota que ven i pateix un pèrdua de 20€ per cada pilota defectuosa que ha de llençar a la deixalleria. En un dia ha fabricat 468 pilotes i ha obtingut uns beneficis de 1025€. Quantes pilotes bones i defectuoses ha fabricat en aquest dia?

(5) La base més gran d'un trapezi mesura $2cm$ més que la petita. L'altura del trapezi és de $13cm$ i la seva àrea de $169cm^2$. Quant mesuren les bases?

(6) $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=5 \end{array}\right.$

(8) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=15 \\ 4x-5y=-3 \end{array}\right.$

(10) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ 8x-7y=54 \end{array}\right.$

(7) $\left\{\begin{array}{l} x+2y=-13 \\ 2x+y=-5 \end{array}\right.$

(9) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=11 \\ 5y-8x=41 \end{array}\right.$

(11) $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 20x-3y=20 \end{array}\right.$

(12) $\begin{cases} 4x + 9y = -11 \\ 8x - 13y = -53 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x - y = -10 \\ 5y = 3x + 50 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} 3x - 4y = -8 \\ -2x + 5y = 17 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} 3x - 2y = 32 \\ x + 5y = -29 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} 3x - y = 23 \\ 9x - 5y = 67 \end{cases}$

(17) $\begin{cases} 7x + 2y = 0 \\ 9y + 50x = 26 \end{cases}$

(18) $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 5y + x = 20 \end{cases}$

(19) $\begin{cases} 7x - 8y = 2 \\ 11x - 10y = -2 \end{cases}$

(20) $\begin{cases} 4x = y \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

(21) $\begin{cases} 7x - 16y = 26 \\ 5x + 17y = 47 \end{cases}$

(22) $\begin{cases} x = 6 \\ 5x - 71y = 30 \end{cases}$

(23) $\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 10x - y = 46 \end{cases}$

(24) $\begin{cases} 2x - 3y = 35 \\ 4x - y = 45 \end{cases}$

(25) $\begin{cases} 8x - 21y = -155 \\ 6x - 5y = 45 \end{cases}$

(26) $\begin{cases} 7x - 5y = -16 \\ 3x + 10y = -19 \end{cases}$

(27) $\begin{cases} 7x + 11y = -6 \\ -x + 10y = -57 \end{cases}$

(28) $\begin{cases} 9x - 17y = -8 \\ 17x + 9y = 26 \end{cases}$

(29) $\begin{cases} 3x - 28y = -22 \\ 5x + 42y = 52 \end{cases}$

(30) Busquem dos nombres. Sabem que difereixen en 4 unitats i que si al doble del primer li restem el segon, en quedem amb -1.

(31) Si sumes 119 a un nombre n'obtens el doble d'un altre i si restes 22 del segon obtens el triple del primer. De quins nombres estem parlant?

(32) En Jeroni ha comprat 4 litres de llet de soja i llet de civada per un total de 3,92€. Si el litre de llet de soja costa 1,02€ i el de civada 0,94€. Quants litres de cada ha comprat?

(33) Es fa un examen test a un grup d'estudiants amb 43 preguntes sobre Matemàtiques. Per cada preguntada contestada correctament es donen 6 punts i per cada pregunta mal contestada o no contestada et treuen 4 punts. Un alumne ha obtingut 118 punts. Quantes preguntes ha respòs bé i quantes malament?

(34) Es vol barrejar vi de 2€ al litre amb vi de 5€, de manera que el vi que ens quedi tingui un preu de 4.1€ el litre. Quants litres de cada classe s'han de barrejar per obtenir una mescla de 200 litres?

(35) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$

(36) $\begin{cases} 3x + 5y = -3 \\ 21x - 35y + 21 = 0 \end{cases}$

(37) $\begin{cases} x - 1 = y \\ 2y = 10x - 82 \end{cases}$

(38) $\begin{cases} 21y + 20x = 143 \\ 77y - 30x = 218 \end{cases}$

(39) $\begin{cases} x + y = 28 \\ 3x - 11y = 8y - 4 \end{cases}$

(40) $\begin{cases} 3x - 2y = -15 \\ x + 7 = 2y + 14 \end{cases}$

(41) $\begin{cases} 28y - 27x = 7 \\ x + 6y = y + 42 \end{cases}$

(42) $\begin{cases} 20x - 23y = 212 \\ 19x - 21y = 198 \end{cases}$

(43) $\begin{cases} 20x - 25y = 0 \\ x - y = y - 15 \end{cases}$

(44) $\begin{cases} 4x + 6y = -12 \\ 17x - 5y = 1474 \end{cases}$

(45) $\begin{cases} x - 5y = -15x + 27 \\ x + 30 = y + 31 \end{cases}$

(46) $\begin{cases} 9x - 8y = 1 \\ 12x - 10y = 2 \end{cases}$

(47) $\begin{cases} 6x - y = y + 42 \\ 10y + x = 10x - 63 \end{cases}$

(48) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3x + 8y = -4 \end{cases}$

(49) $\begin{cases} 21x - 2y = 23 \\ 3(y - 47) = 6x + 3 \end{cases}$

(50) $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 2(y + 4x) = 25 + 3x \end{cases}$

(51) $\begin{cases} 5(x - 2) = y + 2 \\ x - 23 = 3(y - 5) \end{cases}$

(52) $\begin{cases} x + 49y = 741 \\ 49x + y = 309 \end{cases}$

(53) $\begin{cases} 10x + 7y = -5 \\ 3x - 5y = 34 \end{cases}$

(54) $\begin{cases} 12x + 11y = 1 \\ 3y - 2(x - 8) = 11 \end{cases}$

(55) $\begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 6y - (x - 3) = 75 \end{cases}$

(56) Fa 5 anys, l'edat de la Rita era el doble de la que tenia en Pau. D'aquí a 8 anys, les edats de tots dos sumaran 56. Quants anys té ara cadascun?

PROBLEMA RESOLT 2

La suma de dos nombres és 46. Si dividim el primer per 2 i el segon per 3, la diferència entre els quocients del primer i el segon és de 13 unitats. Troba els dos nombres.

1^r. **Cal llegir tot el problema fins el final i preguntar-nos què ens demana**. Troba dos nombres
2^n. **Definir les variables:** x = un nombre, y = un altre nombre
3^r. **Plantejament algebraic**: Llegir de nou l'exercici i traduir-lo a llenguatge algebraic:

La suma de dos nombres és 46. $x + y = 46$
Si dividim el primer per 2 i el segon per 3, la diferència entre els quocients del primer i el segon és de 13 unitats: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 13$

4è. **Resoldre el sistema**. En aquest cas ho farem pel Mètode de Substitució aïllant la variable x:

$$\begin{cases} x + y = 46 \longrightarrow x = 46 - y \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 13 \end{cases}$$

I substituïm el valor de la variable x a l'altra equació:

$$\begin{aligned} \frac{46-y}{2} - \frac{y}{3} &= 13 \\ \frac{3(46-y) - 2(y)}{6} &= 13 \\ 3(46-y) - 2y &= 6 \cdot 13 \\ 138 - 3y - 2y &= 78 \\ -3y - 2y &= 78 - 138 \\ -5y &= -60 \\ y &= \frac{-60}{-5} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Substituïm el valor de la y trobat a qualsevol de les dues equacions:

$$x + 12 = 36 \longrightarrow \; x = 36 - 12 \longrightarrow x = 24$$

La solució del sistema d'equacions és : $x = 24,\; y = 12$.

5è. **Escriure la Solució del Problema:**

RESPOSTA: Un dels números és el 12 i l'altre és el 24.

(**57**) En Marçal va a comprar en una botiga de la xarxa de consum responsable i compra 3 paquets d'$\frac{1}{4}kg$ de cafè i $3Kg$ de sucre biològics, per la qual cosa paga 12,75€. L'Anna, la qual no sabia que en Marçal ja havia anat a comprar, també hi va i compra 1 paquet d'$\frac{1}{4}kg$ de cafè i $10kg$ de sucre. Paga 20€. Cap dels dos no s'ha fixat amb el preu de cada cosa i han llençat les factures. Pots saber el preu de cada cosa per separat?

(**58**) Un tren va a una velocitat de $75\frac{km}{h}$. Va $132km$ més endavant que un altre tren que va per una via paral·lela a $119\frac{km}{h}$. Calcula el temps que tarda el segon tren en trobar el primer i la distància recorreguda pel primer tren fins que han coincidit els dos trens.

(**59**) Un obrer ha treballat durant 30 dies per dos empreses diferents guanyant 945€. La primera empresa li pagava 25€ per dia i la segona 40€ per dia. Quants dies ha treballat per cada empresa?

(**60**) Un nen li diu a un amic: Dóna'm 5€ i així tindrem els mateixos diners tots dos. L'amic li respon amb ironia: Sí, home... Dóna'm tu 10€ i així jo tindré el doble que tu. Quants diners té cadascun?

(61) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

(62) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

(63) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3y+x=10 \end{cases}$

(64) $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ y-3x=1 \end{cases}$

(65) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ y-2x=1 \end{cases}$

(66) $\begin{cases} 3y+x=7 \\ x+3y=7 \end{cases}$

(67) $\begin{cases} x-3y=-1 \\ y+x=-5 \end{cases}$

(68) $\begin{cases} x+3y=2 \\ y+x=6 \end{cases}$

(69) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ y-3x=-1 \end{cases}$

(70) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ y-x=-6 \end{cases}$

(71) $\begin{cases} 5x+y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$

(72) $\begin{cases} x-3y=5 \\ y+x=-3 \end{cases}$

(73) $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$

(74) $\begin{cases} y-x=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

(75) $\begin{cases} x+2y=18 \\ y-x=3 \end{cases}$

(76) $\begin{cases} 2y-x=15 \\ x-y=6 \end{cases}$

(77) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -x+y=-5 \end{cases}$

(78) $\begin{cases} y-x=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

(79) $\begin{cases} x+2y=14 \\ y-x=7 \end{cases}$

(80) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y+3x=-2 \end{cases}$

(81) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-4y=-9 \end{cases}$

(82) Un rellotge marca les tres en punt. Per tant, les dues agulles del rellotge formen un angle recte. Quant de temps ha de transcórrer perquè tornin a formar un angle recte?

(83) Un rellotge de busques marca les dotze hores. A quina hora la minutera es trobarà amb l'agulla que marca les hores?

(84) Un dipòsit s'omple per una aixeta en 5 hores i per una altra en dues hores. Quan tardarà en omplir-se el dipòsit si obrim les dues aixetes?

(85) Dos pobles, la vila del pingüi i repsolandia estan a una distància de $155km$. A la mateixa hora, surten de cada poble un ciclista. El ciclista que surt de la vila del pingüi pedala a una velocitat de $25\frac{km}{h}$ i el que surt de repsolandia a $33\frac{km}{h}$. A quina distància de cada poble es trobaran? Quan de temps ha passat?

(86) L'àrea d'un triangle rectangle és de $120cm^2$ i la hipotenusa mesura $26cm$. Quines són les longituts dels catets?

(87) The admission price to a football math for 4 adults and 3 children is £145. The admission price for 5 adults and 2 children is £155. Write out and solve the simultaneous equations that represent this problem.

4.2 Solucions dels sistemes de primer grau

(1) 21 conills i 20 gallines

(2) 31 margarites i 22 de quatre formatges

(3) 544 de 6l i 1153 de 2l

(4) 335 de bones i 133 de defectuoses.

(5) $12cm$ i $14cm$

(6) $x=1$, $y=5$

(7) $x=1$, $y=-7$

(8) $x=3$, $y=3$

(9) $x=-2$, $y=5$

(10) $x=5$, $y=-2$

(11) $x=1$, $y=0$

(12) $x=-5$, $y=1$

(13) $x=0$, $y=10$

(14) $x=4$, $y=5$

(15) $x=6$, $y=-7$

(16) $x=8$, $y=1$

(17) $x=2$, $y=-7$

(18) $x=10$, $y=2$

(19) $x=-2$, $y=-2$

(20) $x=3$, $y=12$

(21) $x=6$, $y=1$

(22) $x=6$, $y=0$

(23) $x=5$, $y=4$

(24) $x=10$, $y=-5$

(25) $x=20$, $y=15$

(26) $x=-3$, $y=-1$

(27) $x=7$, $y=-5$

(28) $x=1$, $y=1$

(29) $x=2$, $y=1$

(30) -5 i -9

(31) 15 i 67

(32) 2 litres de cada

(**33**) 29 de bones i 14 de dolentes

(**34**) 50 de 2€ i 140 de 5€

(**35**) $x = 8$, $y = 2$

(**36**) $x = 9$, $y = -6$

(**37**) $x = 10$, $y = 9$

(**38**) $x = 3$, $y = 4$

(**39**) $x = 24$, $y = 4$

(**40**) $x = -11$, $y = -9$

(**41**) $x = 7$, $y = 7$

(**42**) $x = 6$, $y = -4$

(**43**) $x = 25$, $y = 20$

(**44**) $x = 72$, $y = -50$

(**45**) $x = 2$, $y = 1$

(**46**) $x = 1$, $y = 1$

(**47**) $x = 7$, $y = 0$

(**48**) $x = 12$, $y = 4$

(**49**) $x = 7$, $y = 62$

(**50**) $x = 7$, $y = -5$

(**51**) $x = 2$, $y = -2$

(**52**) $x = 6$, $y = 15$

(**53**) $x = 3$, $y = -5$

(**54**) $x = 1$, $y = -1$

(**55**) $x = -12$, $y = 10$

(**56**) La Rita té 25 anys i en Pau 15

(**57**) 2,5€ el paquet de cafè i 1,75€ el kilo de sucre

(**58**) 3 hores i 225km

(**59**) 17 amb el primer i 13 amb el segon.

(**60**) Un té 40€ i l'altre 50€.

(**61**) $x = 3$, $y = 2$

(**62**) $x = 2$, $y = 5$

(**63**) $x = 7$, $y = 1$

(**64**) $x = 1$, $y = 4$

(**65**) $x = 2$, $y = 5$

(**66**) $x = 1$, $y = 2$

(**67**) $x = -4$, $y = -1$

(**68**) $x = 8$, $y = -2$

(**69**) $x = 1$, $y = 2$

(**70**) $x = 4$, $y = -2$

(**71**) $x = 1$, $y = -2$

(**72**) $x = -1$, $y = -2$

(**73**) $x = 5$, $y = 3$

(**74**) $x = 1$, $y = 2$

(**75**) $x = 4$, $y = 7$

(**76**) $x = 27$, $y = 21$

(**77**) $x = -4$, $y = -9$

(**78**) $x = 1$, $y = 1$

(**79**) $x = 0$, $y = 7$

(**80**) $x = -3$, $y = 7$

(**81**) $x = 1$, $y = 3$

(**82**) 1h 5min 27s

(**83**) 3h 32min 44s

(**84**) 1h 25min 43s

(**85**) 2h 40min 21s

(**86**) $x = 24cm$ i $y = 10cm$

(**87**) £25 adults and £15 children

Capítol 5

Equacions de 2^n grau

Una equació de segon grau és una equació polinòmica on el grau més alt dels diversos monomis que la integren és 2. La seva expressió general és:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \quad a \neq 0$$

Totes les equacions de 2^n grau tenen dues solucions.

5.1 Equacions del tipus $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 = -c \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{-c}{a} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Exemple 1

$$13x^2 - 52 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 13x^2 = 52 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{52}{13} = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

(**1**) La base d'un mirall rectangular, que té $48dm^2$ d'àrea, mesura la tercera part de l'altura. Calcula les dimensions del mirall.

(**2**) Troba dos nombres positius el producte dels quals sigui 363, i el quocient, 3.

(**3**) Un nombre més 1 multiplicat pel mateix nombre menys 1 és igual a 3. De quin nombre estem parlant?

(**4**) Una piràmide regular de base quadrada té una altura de $15m$ i s'han necessitat $980m^3$ per construir-la. Calcula el costat de la base de la piràmide.

(**5**) Quins nombres són iguals al seu invers. Calcula'ls.

(**6**) Troba dos nombres naturals consecutius tals que la diferència dels seus quadrats sigui 17.

(**7**) $x^2 - 1 = 0$

(**8**) $x^2 - 4 = 0$

(**9**) $x^2 - 196 = 0$

(**10**) $x^2 - 225 = 0$

(**11**) $x^2 - 1024 = 0$

(**12**) $-2x^2 + 338 = 0$

(**13**) $4x^2 - 784 = 0$

(**14**) $-6x^2 + 2166 = 0$

(**15**) $-x^2 + 81 = 0$

(**16**) $x^2 - 144 = 0$

(**17**) $-8x^2 + 32 = 0$

(**18**) $x^2 + 9 = 0$

(**19**) $-5x^2 + 2000 = 0$

(**20**) $12x^2 - 108 = 0$

(**21**) $-10x^2 + 810 = 0$

(**22**) $15x^2 - 540 = 0$

(**23**) $34x^2 - 34 = 0$

(**24**) $12x^2 - 2883 = 0$

(**25**) $-63x^2 + 343 = 0$

(**26**) $84x^2 - 4116 = 0$

(**27**) $52x^2 - 40768 = 0$

(28) $-2300x^2 + 92 = 0$

(29) $576x^2 - 4096 = 0$

(30) $175x^2 - 2527 = 0$

(31) $x^2 - 36 = 0$

(32) $2x^2 - \frac{8}{9} = 0$

(33) $-x^2 + 49 = 0$

(34) $60 - 15x^2 = 0$

(35) $-2x^2 + 242 = 0$

(36) $5x^2 + 23 = 0$

(37) $-x^2 + 4096 = 0$

(38) $20x^2 - 720 = 0$

(39) $49x^2 - 225 = 0$

(40) $175x^2 - 252 = 0$

(41) $36x^2 = 0$

(42) $900x^2 - 1 = 0$

5.2 Equacions del tipus $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \implies x(ax+b) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \implies x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Exemple 2

$$8x^2 + 72x = 0 \implies x(8x+72) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 8x + 72 = 0 \implies x = \dfrac{-72}{8} = -9 \end{cases}$$

(43) El quadrat d'un nombre menys el seu doble és igual a 0. Quin número és?

(44) Troba dos nombres la diferència dels quals és 7 i la suma dels quadrats és 49.

(45) El quadrat d'un nombre coincideix amb el triple d'aquest nombre. De quin nombre es tracta?

(46) Calcula tots els nombres tals que el seu quadrat és igual al seu quàdruple.

(47) $x^2 - 9x = 0$

(48) $x^2 - 12x = 0$

(49) $-2x^2 + 192x = 0$

(50) $12x^2 - 132x = 0$

(51) $-2x^2 - 7x = 0$

(52) $32x^2 - 1024x = 0$

(53) $-49x^2 + 343x = 0$

(54) $9x^2 - 486x = 0$

(55) $22x^2 + 440x = 0$

(56) $-30x^2 - 45x = 0$

(57) $22x^2 - 121x = 0$

(58) $-4x^2 + 90x = 0$

(59) $112x^2 + 672x = 0$

(60) $4x^2 + 124x = 0$

(61) $-6x^2 + 81x = 0$

(62) $24x^2 + 4x = 0$

(63) $-12x^2 + 1720x = 0$

(64) $27x^2 + 810x = 0$

(65) $-35x^2 + 98x = 0$

(66) $91x^2 + 52x = 0$

(67) $-144x^2 - 36x = 0$

(68) $900x^2 + 30x = 0$

(69) $-2048x^2 + 96x = 0$

(70) $33333x^2 - 11111x = 0$

5.3 Equacions del tipus $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemple 3

$$x^2 + 3x - 28 = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} x = \frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x = \frac{-3-11}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \end{cases}$$

(**71**) Esbrina quines edats tenen en Llibert i la Juliana si sabem que en Llibert té 4 anys més que la Juliana i el producte de les seves edats dóna 45.

(**72**) Un dels costats d'un rectangle fa $3cm$ més que l'altre; si l'àrea és de $28cm^2$, escriu l'equació que en calcula les dimensions i calcula el valor de cada costat.

(**73**) Els costats d'un triangle fan 11, 10 i $3cm$. Quina mateixa quantitat s'ha de sumar a cadascun dels costats perquè en resulti un triangle rectangle?

(**74**) L'àrea d'un rectangle és de $8cm^2$, i la base fa $2cm$ més que l'altura. Calcula'n els costats després de plantejar-ne l'equació corresponent.

(**75**) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(**76**) $x^2 + x - 30 = 0$

(**77**) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

(**78**) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(**79**) $-x^2 - 6x - 9 = 0$

(**80**) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(**81**) $x^2 + x - 12 = 0$

(**82**) $-2x^2 + 12x - 16 = 0$

(**83**) $x^2 + x - 2 = 0$

(**84**) $x^2 - 2x - 3 = 0$

(**85**) $-2x^2 - 2x + 40 = 0$

(**86**) $x^2 - x - 6 = 0$

(**87**) $x^2 + 2x - 8 = 0$

(**88**) $-3x^2 + 24x - 48 = 0$

(**89**) $x^2 + 7x - 18 = 0$

(**90**) $2x^2 - 20x + 42 = 0$

(**91**) $3x^2 - 3x - 90 = 0$

(**92**) $3x^2 + x - 2 = 0$

(**93**) $-15x^2 + 4x + 35 = 0$

(**94**) $5x^2 - 3x - 26 = 0$

(**95**) $25x^2 - 10x - 8 = 0$

(**96**) $-4x^2 + 8x + 21 = 0$

(**97**) $7x^2 - 32x - 15 = 0$

(**98**) $5x^2 - 31x + 30 = 0$

(**99**) $-7x^2 - 10x - 3 = 0$

(**100**) $25x^2 - 15x - 4 = 0$

(**101**) $-x^2 + 3x - 2 = 0$

(**102**) $x^2 + 2x - 35 = 0$

(**103**) $-x^2 + 19x - 84 = 0$

(**104**) $3x^2 + 19x - 14 = 0$

(**105**) $x^2 + 6x - 55 = 0$

(**106**) $-15x^2 - 11x + 12 = 0$

(**107**) $2x^2 - 15x + 7 = 0$

(**108**) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(**109**) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(**110**) $-x^2 + 8x - 15 = 0$

(**111**) $x^2 - x - 2 = 0$

(**112**) $-4x^2 - 16x + 84 = 0$

(**113**) $x^2 - 9x - 10 = 0$

(**114**) $x^2 + 7x - 18 = 0$

(**115**) $x^2 - 14x + 49 = 0$

(**116**) $-3x^2 - 18x - 27 = 0$

5.4 Comportament de les solucions

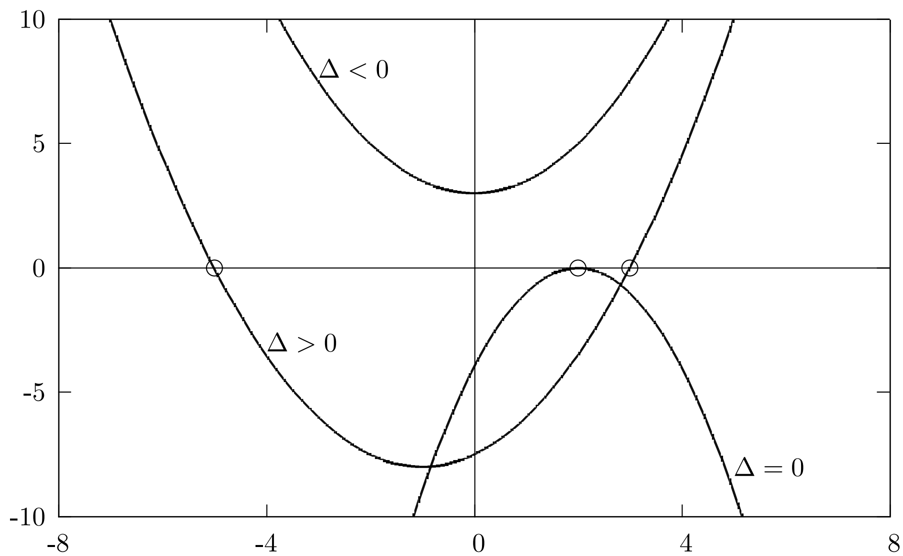
Les equacions de segon grau completes es resolen mitjançant la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al valor de dintre l'arrel de $b^2 - 4ac$ se l'anomena discriminant i es defineix amb la lletra grega delta majúscula, $\Delta = b^2 - 4ac$. Segons el valor del discriminant (positiu, nul o negatiu) l'equació té dues, una o cap solució respectivament.

L'esquema seria aquest:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ llavors l'equació té dues solucions.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ llavors l'equació només té una solució.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ llavors l'equació no té solució.



Una altra manera d'interpretar les solucions d'una equació de segon grau, és buscant els possibles punts de tall de la **paràbola** o gràfica de la funció quadràtica $y = ax^2 + bx + c$ amb l'eix de les abscisses o eix de les X's.

Observa en el gràfic de la figura anterior, la relació entre els coeficients de la funció quadràtica, les solucions de l'equació de segon grau i la intersecció amb l'eix d'abscisses de la seva gràfica.

5.5 Repàs general d'equacions de 2^n grau

(**117**) $2x^2 + 2x - 60 = 0$

(**118**) $x^2 - 15x + 56 = 0$

(**119**) $x^2 + 3x - 54 = 0$

(**120**) $-5x^2 - 30x + 455 = 0$

(**121**) $3x^2 - 12x - 15 = 0$

(**122**) $5x^2 - 10x - 15 = 0$

(**123**) $-2x^2 - 4x + 96 = 0$

(**124**) $2x^2 - 40x + 198 = 0$

(**125**) $-3x^2 + 21x - 30 = 0$

(**126**) $x^2 + 7x - 8 = 0$

(**127**) $x^2 + 6x - 27 = 0$

(**128**) $-25x^2 + 5x + 6 = 0$

(**129**) $2x^2 - x - 3 = 0$

(**130**) $-3x^2 + 19x - 20 = 0$

(**131**) $15x^2 + 16x - 15 = 0$

(**132**) $200x^2 - 20x = 120 + 21x - 145x^2$

(**133**) $5x^2 - 3x + 2 = -3 - 9x + 4x^2$

(**134**) $7x^2 - 2(x+1) = 6x^2 - 3x + 10$

(**135**) $x^2 - 2x - 15 = 0$

(**136**) $-2x^2 + x + 1 = 0$

(**137**) $x^2 + 10x + 21 = 0$

(**138**) $x^2 + 2x - 24 = 0$

(**139**) $3x^2 - 24x + 45 = 0$

(**140**) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(**141**) $2x^2 = -2x + 4$

(**142**) $3x = 10 - x^2$

(**143**) $2x^2 - 6 = 0$

(**144**) $x^2 - 16 = 0$

(**145**) $1 - 8x^2 = 0$

(**146**) $(x+2)(x-3) = 0$

(**147**) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

(**148**) $\frac{x^2-1}{3} = 5$

(**149**) $(x-2)^2 = 9$

(**150**) $(x-4)^2 = -9$

(**151**) $(x+3)^2 = 0$

(**152**) $(x-3)^2 = 4$

(**153**) $3x^2 - x = 0$

(**154**) $\frac{x^2}{3} = -\frac{x}{5}$

(**155**) $x^2 + x = 0$

(**156**) $4x^2 + 8x - 12 = 0$

(**157**) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$

(**158**) $x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5} = 0$

(**159**) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

(**160**) $-15x = -56 - x^2$

(**161**) $2x^2 - 16 = -4x$

(**162**) $12 = -7x - x^2$

(**163**) $-4x^2 + 100 = 0$

(**164**) $-10000 + x^2 = 0$

(**165**) $-2 = -2x^2$

(**166**) $-3x^2 = -243$

(**167**) $3x^2 + 6x = 0$

(**168**) $0 = -4x^2 - 88x$

(**169**) $-11x^2 = 121x$

(**170**) $-4x = 36x^2$

(**171**) $(x-1)(x+2) = 0$

(**172**) $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+2}{x+1}$

(**173**) $2x^2 - 8 = 0$

(**174**) $x^2 - 2x = 0$

(**175**) $2x^2 + 3 + 5x = x^2 + 3$

(**176**) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(**177**) $-5x^2 - 5x + 150 = 0$

(**178**) $-2x^2 - 2x + 12 = 0$

(**179**) $x(x-3) = 10$

(**180**) La suma dels quadrats de dos nombres consecutius i positius és 313. Quins nombres són?

(**181**) El quadrat de la diferència del triple d'un nombre enter i 2 és 16. Quin nombre és?

(**182**) Dos costats paral·lels d'un quadrat s'han prolongat $3cm$, i s'obté un rectangle de $40cm^2$ d'àrea. Planteja l'equació que proporcioni el costat del quadrat inicial, i troba'n la solució per tempteig.

(**183**) La suma dels quadrats de dos nombres parells positius i consecutius és 452. Quins nombres són?

(**184**) La suma dels quadrats de tres nombres consecutius és igual al nombre de dies d'una any que no és de traspàs.

(a) De quins nombres es tracta?

(b) Comprova que la suma dels quadrats dels dos nombres següents als anteriors també coincideix amb aquesta suma.

(**185**) Calcula el valor de k perquè les dues solucions de l'equació $9x^2 - 6kx + 4k = 0$ siguin iguals.

(**186**) La Rita té un dipòsit d'aigua de forma cúbica que voldria engrandir. La Berta ha observat que si cada aresta s'incrementés en $1m$, el volum augmentaria en $37m^3$. Quant fa cada aresta?

(**187**) Una peça rectangular és $4cm$ més llarga que ampla. Amb aquesta peça es construeix una caixa de $840cm^3$ tallant un quadrat de $6cm$ de costat a cada cantó i doblegant-ne les vores. Calcula les dimensions de la caixa.

(**188**) Calcula m perquè l'equació $2x^2 + 8x - m = 0$ tingui una solució doble. Calcula la solució per a aquest valor de m.

(**189**) Calcula c perquè l'equació $x^2 - cx + 4 = 0$ tingui una solució doble. Resol l'equació per a aquest valor de c.

(**190**) Escriu una equació de 2^n grau amb coeficient de x^2 igual a 1, que tingui les solucions $x = 5$ i $x = -3$.

(**191**) Escriu una equació de 2^n grau amb coeficient de x^2 igual a 2, que tingui les solucions $x = -6$ i $x = 3$.

(**192**) Escriu una equació de 2^n grau amb coeficient de x^2 igual a -4, que tingui les solucions $x = 2$ i $x = -7$.

(**193**) Calcula tots els nombres naturals el quadrat dels quals és igual al seu quàdruple augmentat en 117 unitats.

(**194**) Descompon 132 en dos sumands positius de manera que l'un sigui el quadrat de l'altre.

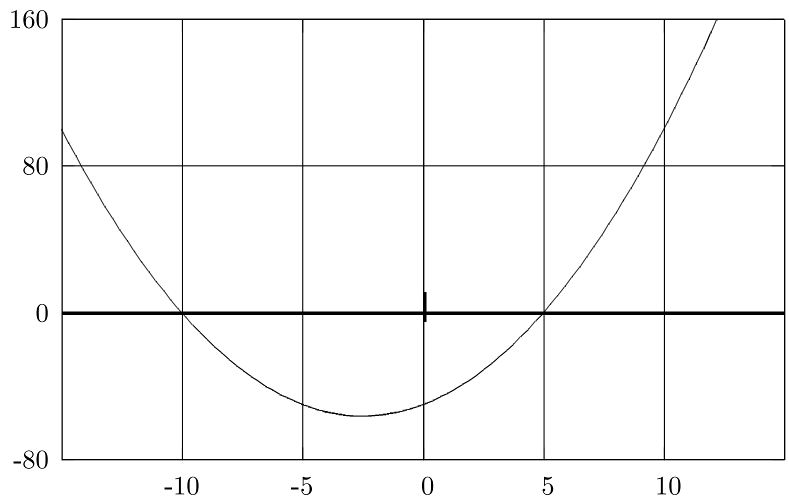
(**195**) El producte de dos nombres naturals consecutius és 182. Quins són aquests nombres?

(**196**) Troba dos nombres naturals consecutius tals que la suma dels seus quadrats sigui 61.

(**197**) Escriu l'equació de 2^n grau sabent que les seves solucions venen indicades per la gràfica de la paràbola representada a continuació:

(**198**) Indica les solucions de les següents equacions només mirant les gràfiques de les paràboles. Explica com ho dedueixes i comprova-ho resolent les equacions de 2^n corresponents.

(**199**) Resol les següents equacions i indica el significat de les solucions que trobis dibuixant l'esboç de la gràfica de la paràbola corresponent (recorda que els punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses, si n'hi ha, han de quedar perfectament definits):



(a) $x^2 - x - 12 = 0$

(b) $2x^2 - 32 = 0$

(c) $-2x^2 + 4x - 5 = 0$

(d) $x^2 + 10x + 25 = 0$

5.6 Solucions de les equacions de 2^n grau

(1) $x = 12dm$, $x = 4dm$

(2) $x = 11$, $x = 33$

(3) $x = 2$, $x = -2$

(4) $x = 14$

(5) $x = 1$, $x = -1$

(6) $x = 8$, $x = 9$

(7) $x = 1$, $x = -1$

(8) $x = 2$, $x = -2$

(9) $x = 14$, $x = -14$

(10) $x = 15$, $x = -15$

(11) $x = 32$, $x = -32$

(12) $x = 13$, $x = -13$

(13) $x = 14$, $x = -14$

(14) $x = 19$, $x = -19$

(15) $x = 9$, $x = -9$

(16) $x = 12$, $x = -12$

(17) $x = 2$, $x = -2$

(18) No té solució

(19) $x = 20$, $x = -20$

(20) $x = 3$, $x = -3$

(21) $x = 9$, $x = -9$

(22) $x = 6$, $x = -6$

(23) $x = 1$, $x = -1$

(24) $x = \frac{31}{2}$, $x = \frac{-31}{2}$

(25) $x = \frac{7}{3}$, $x = \frac{-7}{3}$

(26) $x = 7$, $x = -7$

(27) $x = 28$, $x = -28$

(28) $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{-1}{5}$

(29) $x = \frac{8}{3}$, $x = \frac{-8}{3}$

(30) $x = \frac{19}{5}$, $x = \frac{-19}{5}$

(31) $x = 6$, $x = -6$

(32) $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$

(33) $x = 7$, $x = -7$

(34) $x = 2$, $x = -2$

(35) $x = 11$, $x = -11$

(36) No té solució

(37) $x = 64$, $x = -64$

(38) $x = 6$, $x = -6$

(39) $x = \frac{15}{7}$, $x = -\frac{15}{7}$

(40) $x = \frac{6}{5}$, $x = -\frac{6}{5}$

(41) $x = 0$

(42) $x = \frac{1}{30}$, $x = -\frac{1}{30}$

(43) $x = 2$, $x = 0$

(44) 7 i 0 o -7 i 0

(45) $x = 0$, $x = 3$

(46) $x = 0$, $x = 4$

(47) $x = 0$, $x = 9$

(48) $x = 0$, $x = 12$

(49) $x = 0$, $x = 96$

(50) $x = 0$, $x = 11$

(51) $x = 0$, $x = \frac{-7}{2}$

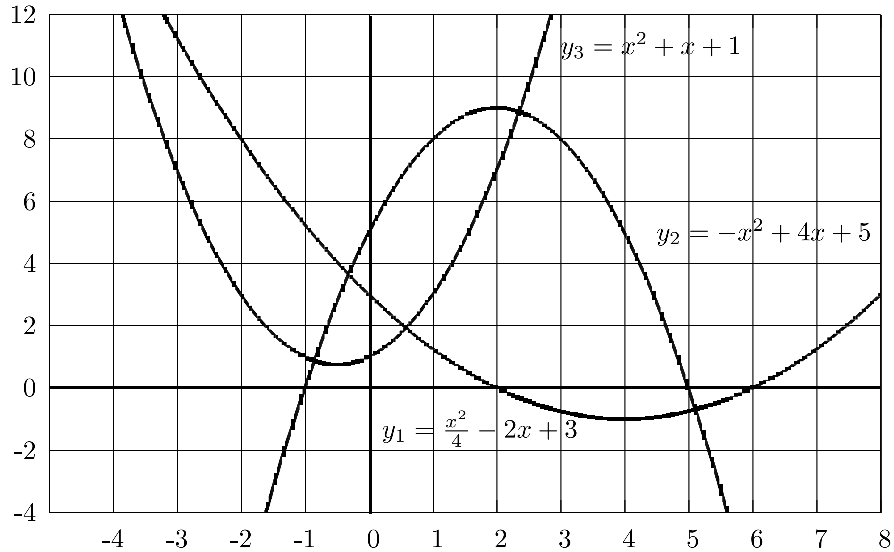
(52) $x = 0$, $x = 32$

(53) $x = 0$, $x = 7$

(54) $x = 0$, $x = 54$

(55) $x = 0$, $x = -20$

(56) $x = 0$, $x = \frac{-3}{2}$



(57) $x = 0,\ x = \frac{11}{2}$

(58) $x = 0,\ x = \frac{45}{2}$

(59) $x = 0,\ x = -6$

(60) $x = 0,\ x = -31$

(61) $x = 0,\ x = \frac{27}{2}$

(62) $x = 0,\ x = \frac{-1}{6}$

(63) $x = 0,\ x = \frac{430}{3}$

(64) $x = 0,\ x = -30$

(65) $x = 0,\ x = \frac{14}{5}$

(66) $x = 0,\ x = \frac{-4}{7}$

(67) $x = 0,\ x = \frac{-1}{4}$

(68) $x = 0,\ x = \frac{-1}{30}$

(69) $x = 0,\ x = \frac{3}{64}$

(70) $x = 0,\ x = \frac{1}{3}$

(71) La Juliana 5 i en Llibert 9

(72) Els costats fan $4cm$ i $7cm$

(73) $2cm$

(74) $2cm$ i $4cm$

(75) $x = 2,\ x = 1$

(76) $x = 5,\ x = -6$

(77) $x = -4,\ x = 1$

(78) $x = 3,\ x = 2$

(79) $x = -3,\ x = -3$

(80) $x = -2,\ x = -2$

(81) $x = 3,\ x = -4$

(82) $x = 2,\ x = 4$

(83) $x = 1,\ x = -2$

(84) $x = -1,\ x = 3$

(85) $x = 4,\ x = -5$

(86) $x = 3,\ x = -2$

(87) $x = 2,\ x = -4$

(88) $x = 4,\ x = 4$

(89) $x = 2,\ x = -9$

(90) $x = 3,\ x = 7$

(91) $x = -5,\ x = 6$

(92) $x = \frac{2}{3},\ x = -1$

(93) $x = \frac{-7}{5},\ x = \frac{5}{3}$

(94) $x = -2,\ x = \frac{13}{5}$

(95) $x = \frac{4}{5},\ x = \frac{-2}{5}$

(96) $x = \frac{-3}{2},\ x = \frac{7}{2}$

(97) $x = \frac{-3}{7},\ x = 5$

(98) $x = \frac{6}{5},\ x = 5$

(99) $x = \frac{-3}{7},\ x = -1$

(100) $x = \frac{4}{5},\ x = \frac{-1}{5}$

(101) $x = 2,\ x = 1$

(102) $x = -5,\ x = 7$

(103) $x = 7,\ x = 12$

(104) $x = -7,\ x = \frac{2}{3}$

(105) $x = 5,\ x = -11$

(106) $x = \frac{3}{5},\ x = \frac{-4}{3}$

(107) $x = 7,\ x = \frac{1}{2}$

(108) $x = 2,\ x = 2$

(109) $x = 5,\ x = 2$

(110) $x = 3,\ x = 5$

(111) $x = 2,\ x = -1$

(112) $x = 3,\ x = -7$

(113) $x = 10,\ x = -1$

(114) $x = 2,\ x = -9$

(115) $x = 7,\ x = 7$

(116) $x = -3,\ x = -3$

(117) $x = 5,\ x = -6$

(118) $x = 7,\ x = 8$

(119) $x = 6,\ x = -9$

(120) $x = 7,\ x = -13$

(121) $x = -1,\ x = 5$

(122) $x = 3,\ x = -1$

(123) $x = 6,\ x = -8$

(124) $x = 9,\ x = 11$

(125) $x = 2,\ x = 5$

(126) $x = 1,\ x = -8$

(127) $x = 3,\ x = -9$

(128) $x = \frac{3}{5},\ x = \frac{-2}{5}$

(129) $x = \frac{3}{2},\ x = -1$

(130) $x = \frac{4}{3},\ x = 5$

(131) $x = \frac{3}{5},\ x = \frac{-5}{3}$

(132) $x = \frac{15}{23},\ x = \frac{-16}{30}$

(133) $x = -5,\ x = -1$

(134) $x = 3,\ x = -4$

(135) $x = -3, x = 5$

(136) $x = -\frac{1}{2}, x = 1$

(137) $x = -7, x = -3$

(138) $x = -1 \pm \sqrt{13}$

(139) $x = 3, x = 5$

(140) $x = 4, x = -6$

(141) $x = -2, x = 1$

(142) $x = 2, x = -5$

(143) $x = \pm\sqrt{3}$

(144) $x = -4, x = 4$

(145) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

(146) $x = -2, x = 3$

(147) $x = \frac{\pm 5}{\sqrt{6}}$

(148) $x = -4, x = 4$

(149) $x = -1, x = 5$

(150) No té solució real

(151) $x = -3$

(152) $x = 1, x = 5$

(153) $x = 0, x = \frac{1}{3}$

(154) $x = 0, x = -\frac{3}{5}$

(155) $x = -1, x = 0$

(156) $x = -3, x = 1$

(157) $x = -2, x = 6$

(158) $x = \frac{2}{5}, x = 2$

(159) $x = 1, x = 4$

(160) $x = 7, x = 8$

(161) $x = -4, x = 2$

(162) $x = -4, x = -3$

(163) $x = -5, x = 5$

(164) $x = -100, x = 100$

(165) $x = -1, x = 1$

(166) $x = -9, x = 9$

(167) $x = -2, x = 0$

(168) $x = -22, x = 0$

(169) $x = -11, x = 0$

(170) $x = -\frac{1}{9}, x = 0$

(171) $x = 1, x = -2$

(172) $x = -\frac{3}{2}$

(173) $x = 2, x = -2$

(174) $x = 0, x = 2$

(175) $x = -5, x = 0$

(176) $x = 1, x = -3$

(177) $x = 5, x = -6$

(178) $x = 2, x = -3$

(179) $x = 5, x = -2$

(180) $x = 12, x = 13$

(181) $x = 2$

(182) $x(x+3) = 40$, $5cm$

(183) 14 i 16

(184) 10, 11 i 12

(185) $k = 0, k = 4$

(186) $3m$

(187) $22cm$ i $26cm$

(188) $m = -8$

(189) $c = 4, x = 2$ i
$c = -4, x = -2$

(190) $x^2 - 2x - 15 = 0$

(191) $2x^2 + 6x - 36 = 0$

(192) $-4x^2 - 20x + 56 = 0$

(193) $x = 13, x = -9$

(194) 11 i 121

(195) 13 i 14

(196) 5 i 6

(197) $x^2 + 5x - 50$

(198) $y_1 \longrightarrow$ $x = 2$ i $x = 4$
$y_2 \longrightarrow$ $x =$ -1 i $x = 5$
$y_3 \longrightarrow$ No té solució

5.7 Representació gràfica de paràboles

Cal buscar una sèrie de característiques: l'eix, el vèrtex, els talls amb els eixos, ...

- Paràbola Creixent o Decreixent: Cal mirar si $a > 0$ (creixent) i llavors la gràfica fa $\circlearrowright$ o $a < 0$ (decreixent) i llavors fa $\curvearrowright$.
- Eix de la paràbola: $x_v = \frac{-b}{2a}$
- Vèrtex: $(x_v, f(x_v))$ on x és el mateix que l'eix i la $f(x_v)$ és el valor de substituir la x a la paràbola.
- Tall amb l'eix de les y's: Substituim per $x = 0$ a la paràbola i busquem el valor de la y_0. El punt de tall amb els eixos serà $(0, y_0)$.
- Tall amb l'eix de les x's: Cal resoldre l'equació de segon grau $y = 0$, és a dir, $ax^2 + bx + c = 0$. Els punts de tall seran els punts $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$, on x_1 i x_2 són les solucions de l'equació de segon grau.

- Fem una taula de valors, aprofitant les dades que tenim i afegint algun punt més.

Representem una paràbola per veure un exemple, $y = x^2 + 2x - 8$:

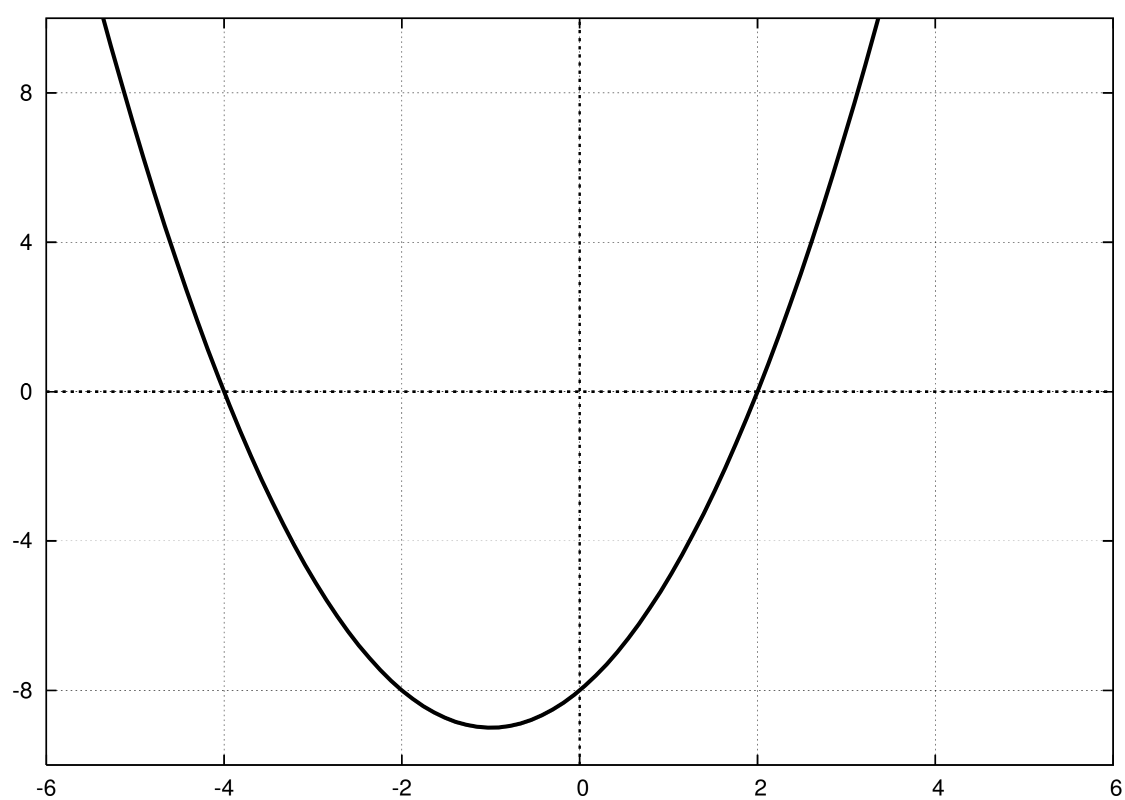
- És **creixent** perquè $a = 1 > 0$.
- Eix de la paràbola: $x = \frac{-2}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$, $x = -1$.
- Vèrtex: $y(-1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 8 = -5$. Per tant, el vèrtex és $(-1, -5)$.
- Tall amb l'eix de les y's: $y(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8$, per tant el punt $(0, -8)$.
- Tall amb l'eix de les x's:

$$y = 0 = x^2 + 2x - 8 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{4}{2} = 2 \\ \\ \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

  Per tant, els punts de tall són $(2, 0)$ i $(-4, 0)$

- Taula de valors:

x	$y = x^2 + 2x - 8$	(x, y)
0	$0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8$	$(0, -8)$
2	$2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 0$	$(2, 0)$
-4	$(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 0$	$(-4, 0)$
-1	$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = -5$	$(-1, -5)$
-2	$(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 8 = -8$	$(-2, -8)$



5.7.1 Exercicis

(1) $f(x) = x^2$

(2) $f(x) = 2x^2$

(3) $f(x) = -2x^2$

(4) $f(x) = x^2 - 4$

(5) $f(x) = -2x^2 + 8$

(6) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(7) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(8) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

(9) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

5.7.2 Solucions

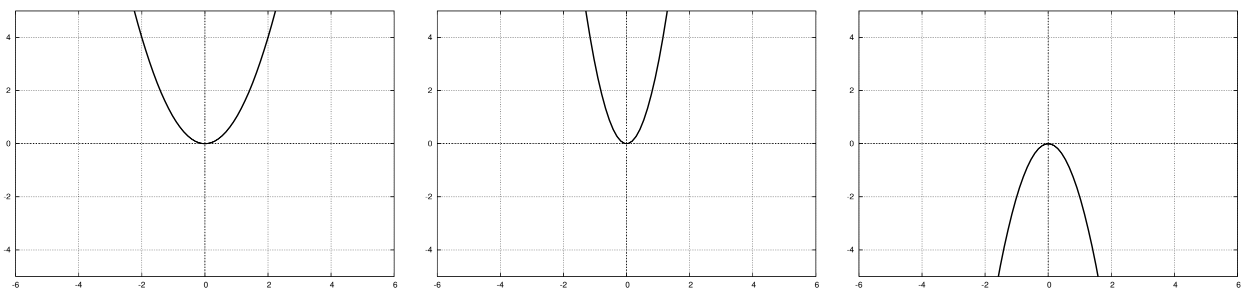


Figura 5.1: (1) $f(x) = x^2$, (2) $f(x) = 2x^2$, (3) $f(x) = -2x^2$

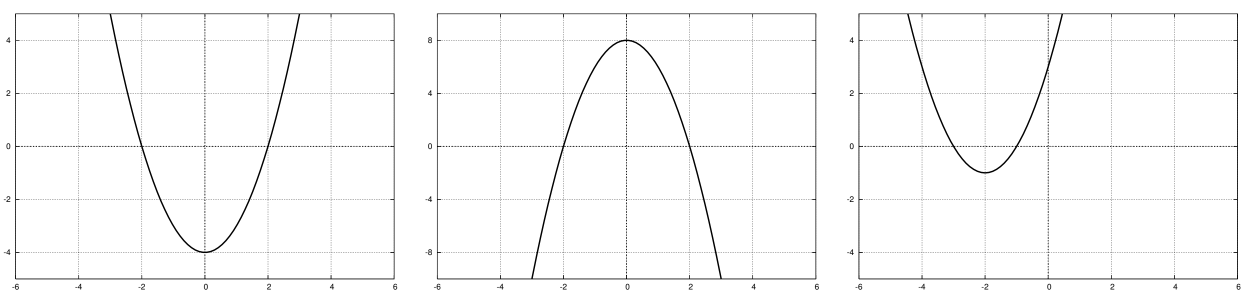


Figura 5.2: (1) $f(x) = x^2 - 4$, (2) $f(x) = -2x^2 + 8$, (3) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

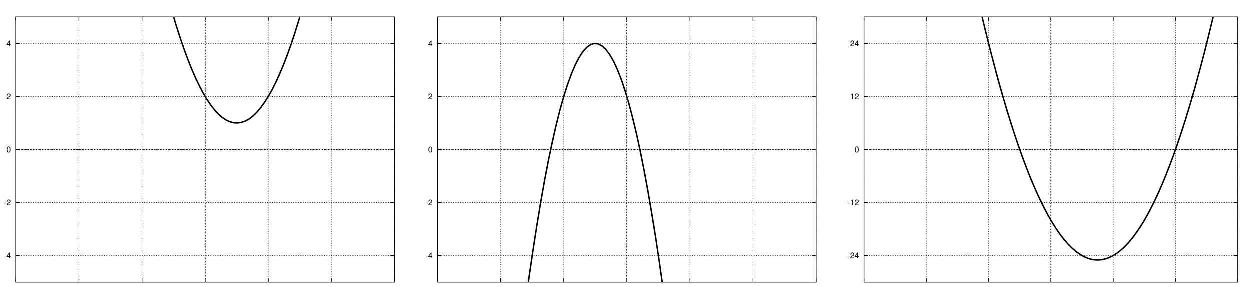


Figura 5.3: (1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, (2) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$, (3) $f(x) = x^2 - 6x - 16$

Capítol 6

Geometria

6.1 Mesures d'angles i temps

En aquesta secció veurem la relació que existeix entre les mesures d'angles i de temps. Tant la magnitud angular com la temporal, es relacionen per un mateixa escala, que es diu Hexadecimal. A continuació a través dels exercicis es veurà com les unitats de les dues magnituds estan relacionades per factors de 60.

6.1.1 Exercicis

(**1**) Contesta a les següents preguntes sobre mesures de magnitud temporal:

(a) Quants minuts representen 3h?
(b) Quants segons representen 1h $23min$?
(c) Quants minuts i segons representen 7,31h?
(d) Explica com has calculat el nombre de segons de l'apartat anterior.
(e) Calcula i explica com calcularies el nombre d'hores, minuts i segons que hi ha en 3,745 dies.
(f) Quants minuts, representen $360s$?
(g) Quantes hores i minuts, representen $195min$?
(h) Quants minuts i segons representen $2563s$?
(i) Explica com has calculat la quantitat de segons de l'apartat anterior.
(j) Calcula i explica com calcularies el nombre dies, hores, minuts i segons que hi ha en $910357min$.

(**2**) Contesta a les següents preguntes sobre mesures de magnitud angular:

(a) Quants minuts representen 15º?
(b) Quants segons representen 1º $23min$?
(c) Quants minuts i segons representen 7,30º?
(d) Explica com has calculat el nombre de segons de l'apartat anterior.
(e) Calcula i explica com calcularies el nombre d'hores, minuts i segons que hi ha en 3,745 voltes. Tingues en compte que una volta equival a 360º.
(f) Quants minuts, representen $720s$?
(g) Quantes graus i minuts, representen $295min$?
(h) Quants minuts i segons representen $2463s$?
(i) Explica com has calculat la quantitat de segons de l'apartat anterior.
(j) Calcula i explica com calcularies el nombre de voltes, graus, minuts i segons que hi ha en $5710357s$.

(**3**) Realitza les següents operacions aritmètiques:

(a) $3min$ $36s$ + $14min$ $52s$

(b) $35min$ $6s$ + $47min$ $557s$

(c) $23min$ $26s$ + $144min$ $552s$

(d) $122min$ $31s$ + $14min$ $512s$

(e) $31min$ $16s$ - $17min$ $522s$

(f) $133min$ $39s$ - $14min$ $552s$

(g) $321min$ $36s$ - $144min$ $512s$

(h) $553min$ $36s$ - $177min$ $536s$

(i) $(3min\ 36s) \cdot 4$

(j) $(7min\ 32s) \cdot 4$

(k) $(113min\ 12s) \cdot 3$

(l) $(53min\ 6s) \cdot 5$

(m) $(3min\ 36s) \div 4$

(n) $(30min\ 30s) \div 3$

(o) $(73min\ 16s) \div 4$

(p) $(33min\ 42s) \div 3$

6.2 Poligons i diagonals

Definim polígon (del grec, ”molts angles”) com una figura geomètrica plana formada per un nombre finit de segments lineals seqüencials. Cada un d'aquests segments és un costat, i cada un dels punts on s'uneixen dos costats és un vèrtex.
I definim diagonal com al segment que uneix dos vèrtex no consecutius.

6.2.1 Exercicis

(**4**) Completa la informació que es demana en cada un dels polígons de la Figura 6.2.1, i al finalitzar intenta trobar una relació entre el nombre de costats de cada polígon i el nombre de diagonals.

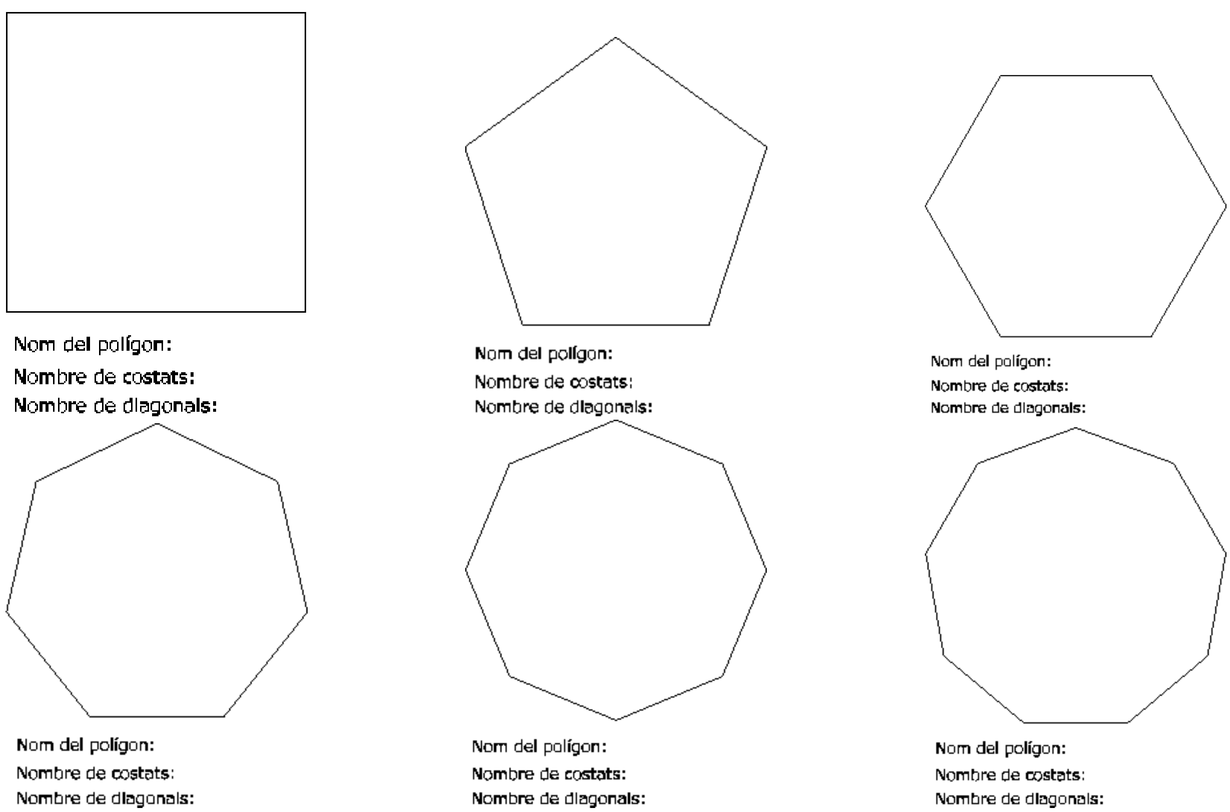
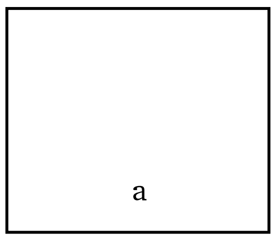
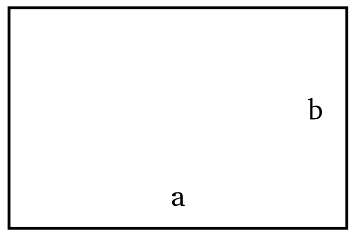
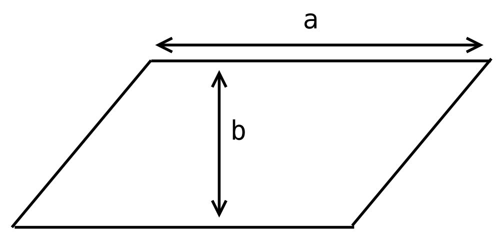


Figura 6.1: Quadrat i Pentagon

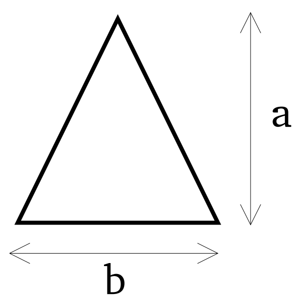
6.3 Fòrmules pel càlcul d'àrees de figures planes

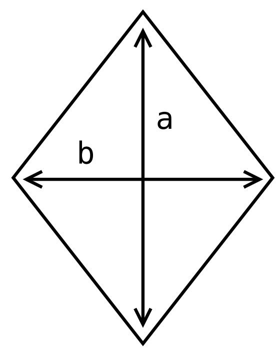




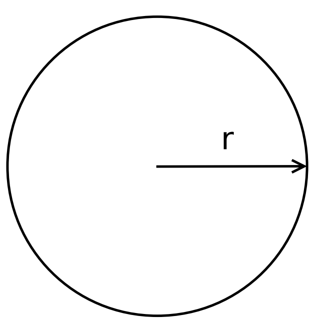


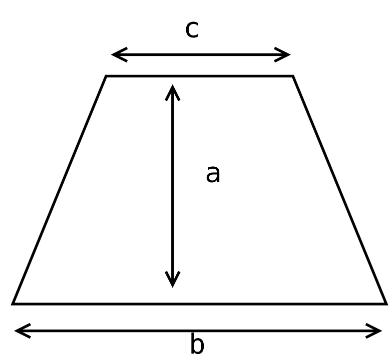
$A = a \cdot a = a^2$ $\qquad$ $A = a \cdot b$ $\qquad$ $A = a \cdot b$





$A = \dfrac{a \cdot b}{2}$ $\qquad$ $A = \dfrac{a \cdot b}{2}$





$A = \pi \cdot r^2$ $\qquad$ $A = \dfrac{a \cdot (b + c)}{2}$

6.4 Càlcul d'àrees de figures planes

(**5**) Considera el següent quadrat (Q), rectangle (R) i triangle (T):
Construeix amb regle a la llibreta les següents figures

(a) Q amb $a = 7cm$

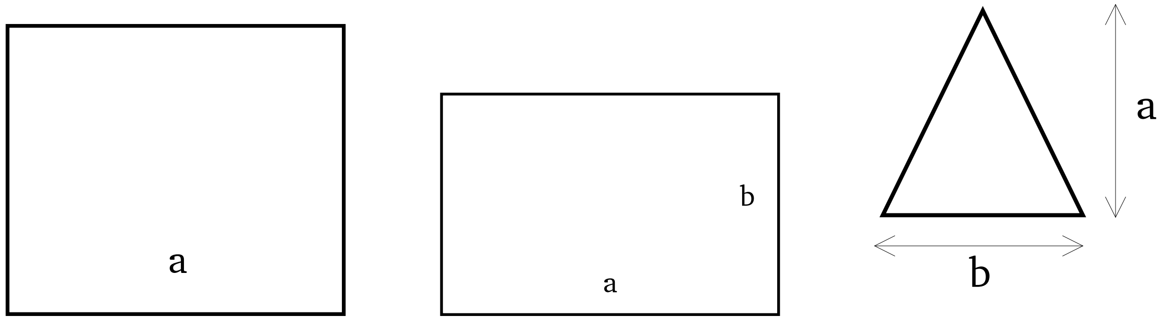
(b) R amb $a = 8cm$ i $b = 1dm$

(c) T amb $a = 37mm$ i $b = 8.5cm$

(d) Q amb $a = 13cm$

(e) R amb $a = 8cm$ i $b = 13mm$

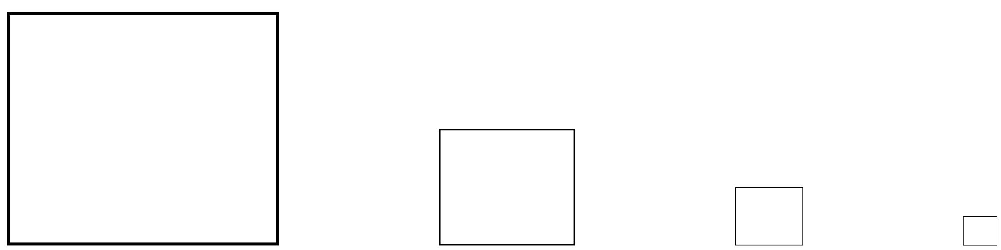
(f) T amb $a = 1.3dm$ i $b = 80mm$



ESCALA

A vegades ens cal representar plànols, terrenys, figures o peces que tenen mides molt grans i no ens hi caben en el full. Per això les representem més petites a **escala**.

Els següents quadrats són el mateix però representats a escales diferents. El primer quadrat és l'original, per tant, direm que l'escala és 1:1. Les mides del segon són la meitat de l'original, per tant, direm que l'escala és 1:2. El tercer està a escala 1:3 i, finalment, l'últim està a escala 1:4.



(**6**) Construeix amb regle a la llibreta les següents figures, aquest cop, utilitzant l'escala que et calgui perquè les figures són molt grans:

(a) Q amb $a = 4Km$

(b) R amb $a = 5m$ i $b = 2Dm$

(c) T amb $a = 32Hm$ i $b = 9.5m$

(d) Q amb $a = 11Hm$

(e) R amb $a = 6m$ i $b = 10Dm$

(f) T amb $a = 1.3m$ i $b = 80dm$

(**7**) Utilitzant les figures del primer exercici calcula l'àrea del:

(a) Q amb $a = 3dm$

(b) R amb $a = 5cm$ i $b = 7dm$

(c) T amb $a = 7Km$ i $b = 8Hm$

(d) Q amb $a = 13m$

(e) R amb $a = 8cm$ i $b = 13mm$

(f) T amb $a = 3Dm$ i $b = 80m$

(**8**) Calcula l'àrea d'un rombe sabent que les seves diagonals mesuren $24cm$ i $32cm$ respectivament.

(**9**) Calcula la superfície d'una moneda de $2cm$ de radi.

(**10**) Les bases d'un trapezi mesuren $12cm$ i $8cm$ respectivament, i la seva altura és de $6cm$. Calcula l'àrea del trapezi.

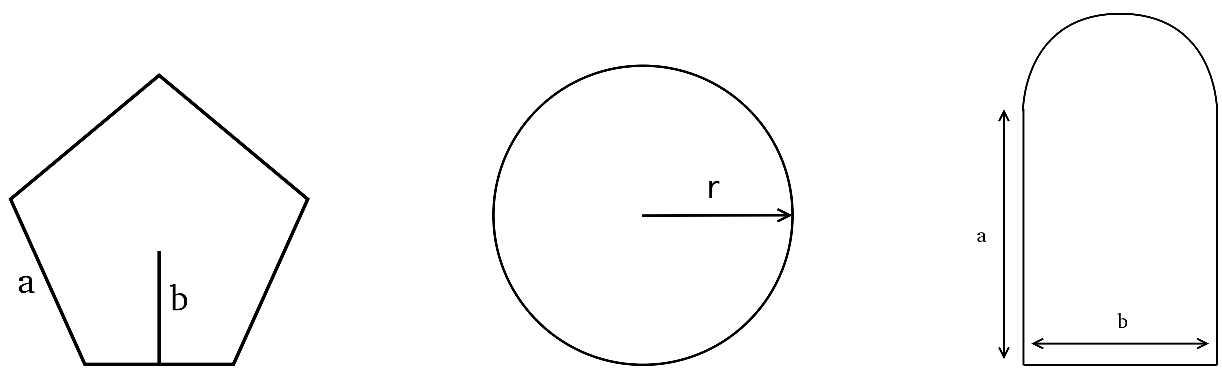
(**11**) Calcula l'àrea d'una plaça rodona sabent que si vas d'una banda a l'altra passant pel centre has de caminar $42m$.

(**12**) El 3 de Juliol del 2003 a Gimnenells (Lleida) un grup de la Plataforma Transgènics Fora va cremar un camp que estava cultivat per blat de moro. El camp tenia forma rectangular i feia $680m$ de llargada per $400m$ d'amplada. Aquestes persones van cremar el camp perquè estava plantat amb llavors genèticament modificades. Quina superfície del camp va ser cremada?

(**13**) Tenim una eina anomenada grimpadora que ens serveix per poder grimpar un cable de xarxa. Ens permet posar els connectors de xarxa d'ordinador a cada banda del cable. La base dels connectors tenen forma rectangular i tenen una mida molt petita, fan $0.5cm$ de llargada per $2mm$ d'amplada. Quina és la seva àrea?

(**14**) Un camp de forma rectangular, on es cultiva espelta per fer pa i alimentar un ramat de vaques que produeix carn ecològica, fa de perímetre $780m$. Si la diferència entre la llargada i l'amplada és de $100m$, calcula la superfície del camp.

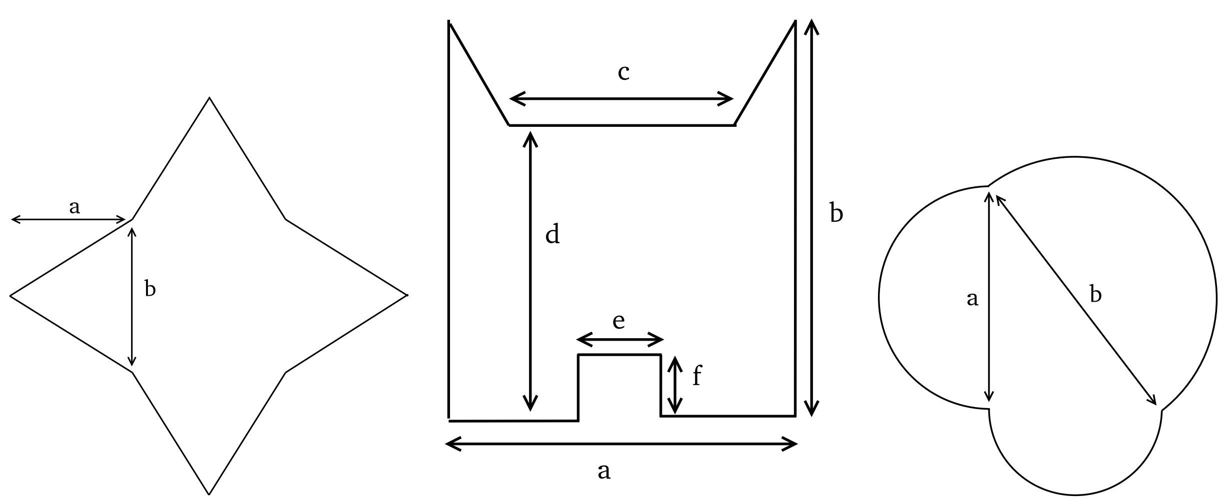
(**15**) Considera el següent pentàgon (P), el cercle ($\bigcirc$) i la 3^a figura:



Calcula l'àrea del:

(a) P amb $a = 2dm$ i $b = 14cm$
(b) P amb $a = 1.2cm$ i $b = 8mm$
(c) $\bigcirc$ amb $r = 8m$
(d) $\bigcirc$ amb $r = 12cm$
(e) 3^a figura amb $a = 17cm$ i $b = 6cm$
(f) 3^a figura amb $a = 19dm$ i $b = 10cm$

(**16**) Considera l'estrella ($\star$), el cap de gat G i la 3^a figura següents:



Calcula l'àrea de la:

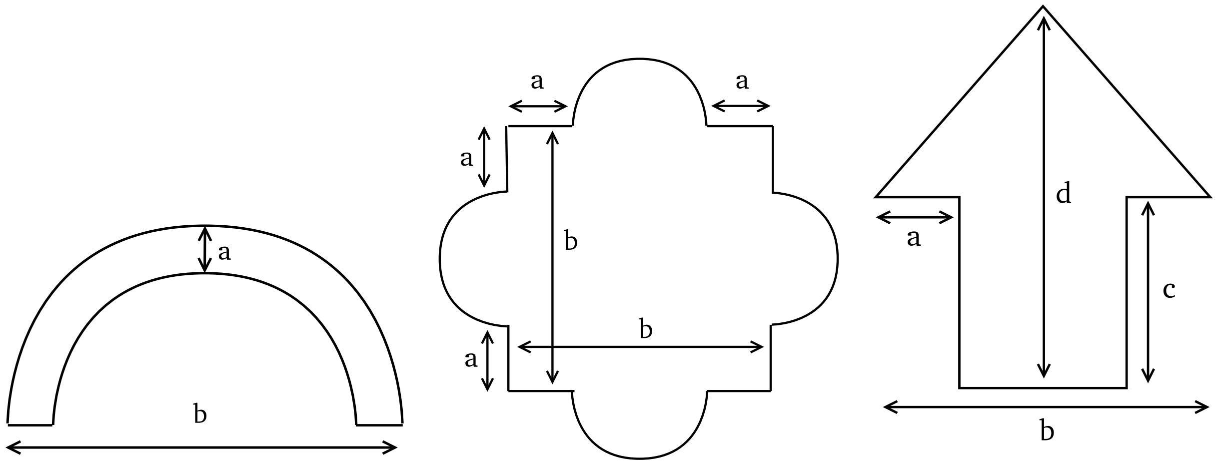
(a) $\star$ amb $a = 2dm$ i $b = 1.5m$
(b) $\star$ amb $a = 1.2dm$ i $b = 0.35m$
(c) G amb $a = 4Hm$, $b = 25Dm$, $c = 3Hm$, $d = 19Dm$, $e = 3Dm$ i $f = 2Dm$.

(d) G amb $a = 3cm$, $b = 20mm$, $c = 2cm$, $d = 15mm$, $e = 5mm$ i $f = 3mm$.

(e) 3^a figura amb $a = 12cm$ i $b = 2dm$

(f) 3^a figura amb $a = 48dm$ i $b = 8m$

(**17**) Considera el pont ($\bigcap$), la peça de puzzle (Ç) i la fletxa ($\Uparrow$) següents:



Calcula l'àrea del:

(a) $\bigcap$ amb $a = 2m$ i $b = 16m$

(b) $\bigcap$ amb $a = 1.2dm$ i $b = 0.36m$

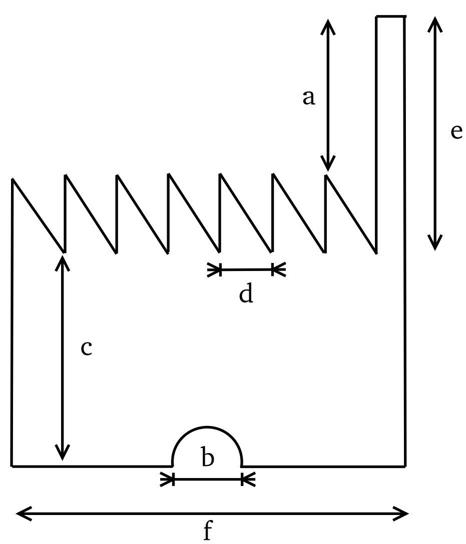
(c) Ç amb $a = 4Hm$ i $b = 16Hm$.

(d) Ç amb $a = 5cm$ i $b = 2dm$.

(e) $\Uparrow$ amb $a = 15cm$, $b = 6dm$, $c = 50cm$ i $d = 8dm$

(f) $\Uparrow$ amb $a = 20Dm$, $b = 1Km$, $c = 8Hm$ i $d = 12Hm$

(**18**) Considera la següent figura la qual ens representa una fàbrica de tèxtil amb xemeneia perquè funciona amb vapor.

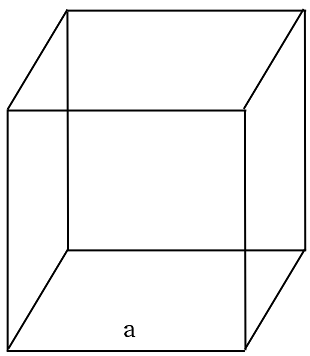


Calcula l'àrea de la figura per valors:

(a) $a = 15m$ $b = 4m$ $c = 35m$ $d = 6m$ $e = 18m$ $f = 46m$

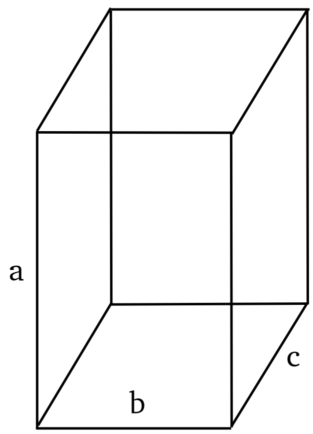
(b) $a = 1.2dm$ $b = 2cm$ $c = 0.3dm$ $d = 30mm$ $e = 20cm$ $f = 2.5dm$

6.5 Fòrmules d'àrees i volums de figures de l'espai



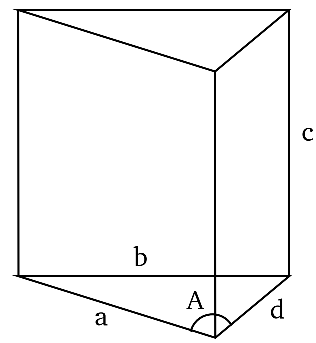
$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$



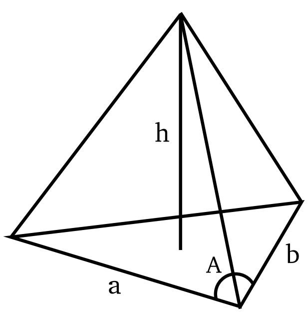
$$A = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

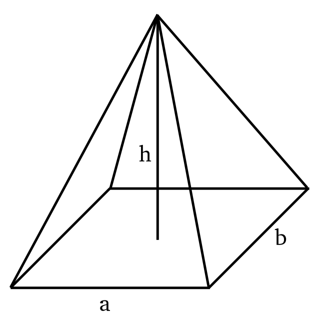


$$A = 2\begin{pmatrix} \text{Àrea} \\ \text{Base} \end{pmatrix} + c(a + b + d)$$

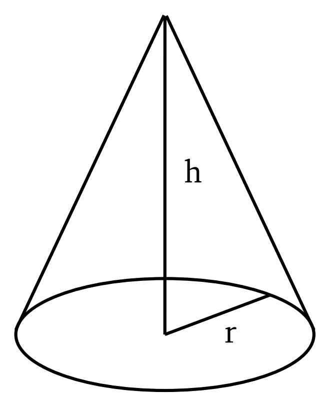
$$V = \begin{pmatrix} \text{Àrea} \\ \text{Base} \end{pmatrix} \times c$$



$$V = \frac{\begin{pmatrix} \text{Àrea} \\ \text{Base} \end{pmatrix} \times h}{3}$$

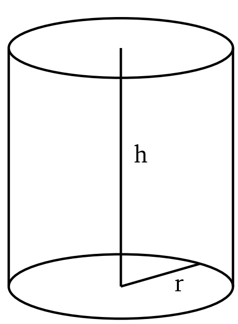


$$V = \frac{abh}{3}$$



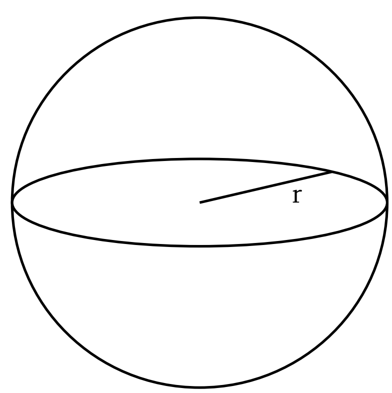
$$A = \pi r g + \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h$$

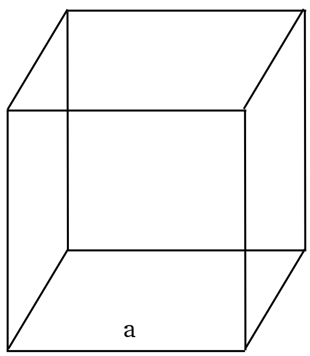


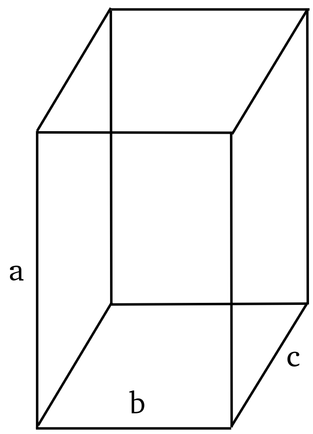
$$A = 4\pi r^2$$

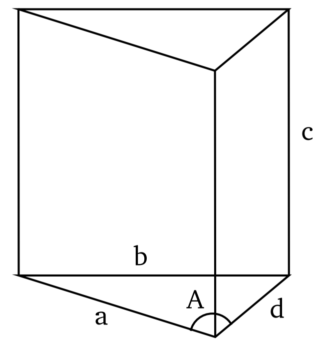
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

6.6 Càlcul d'àrees i volums de figures de l'espai

(**19**) Considera el següent cub ($\Box$), el prisma de base rectangular (*ortoedre*) ($\sqcup$) i el prisma de base triangular ($\triangle$) següents:







Calcula l'àrea i el volum del

(a) $\Box$ amb $a = 15m$

(b) $\Box$ amb $a = 22mm$

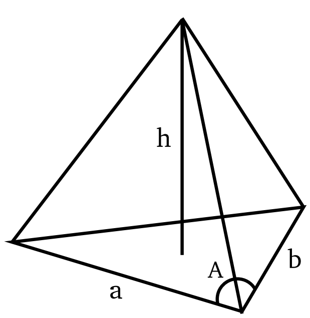
(c) $\sqcup$ amb $a = 15m$ $b = 4m$ $c = 35dm$

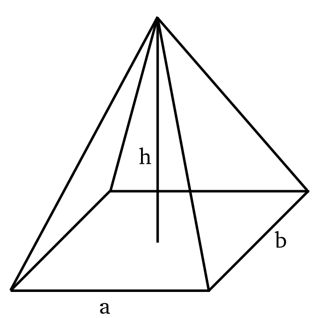
(d) $\sqcup$ amb $a = 2Km$ $b = 4Hm$ $c = 50Dm$

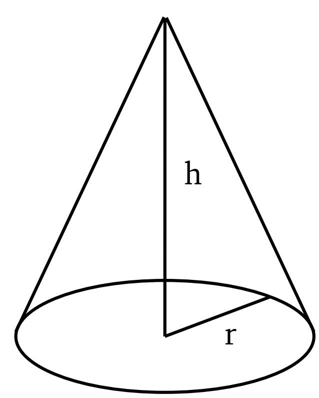
(e) $\triangle$ amb $a = 6Dm$ $b = 1Hm$ $A = 90^o$ $c = 2Hm$

(f) $\triangle$ amb $a = 12dm$ $b = 20dm$ $A = 90^o$ $c = 3.5m$

(**20**) Considera la piramide de base triangular (*tetraedre*) ($\triangle$), la piramide de base rectangular ($\Box$) i el con ($\bigcirc$) següents:







Calcula

(a) el volum de la $\triangle$ amb $a = 15cm$ $b = 20cm$ $A = 90^o$ $h = 2.5dm$

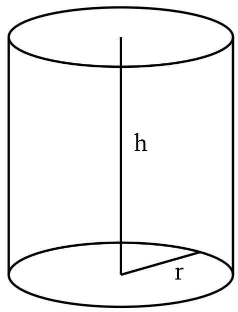
(b) el volum de la $\triangle$ amb $a = 45mm$ $b = 6cm$ $A = 90^o$ $h = 8cm$

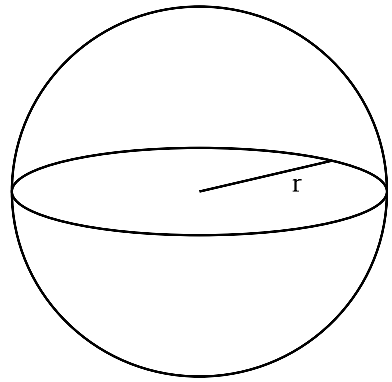
(c) el volum de la $\Box$ amb $a = 15m$ $b = 8m$ $h = 2Dm$

(d) el volum de la $\Box$ amb $a = 2Km$ $b = 3Hm$ $h = 50Dm$

(e) l'àrea i el volum del $\bigcirc$ amb $r = 6Dm$ $h = 8Dm$

(f) l'àrea i el volum del $\bigcirc$ amb $r = 12dm$ $h = 16dm$



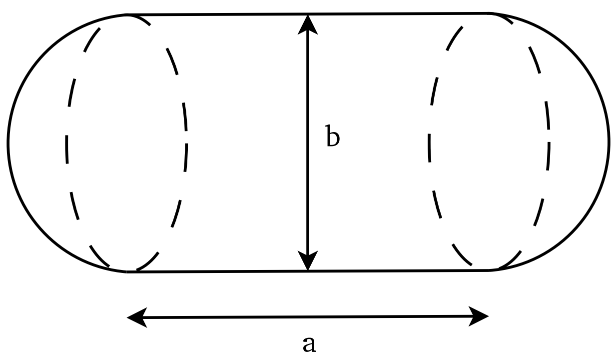


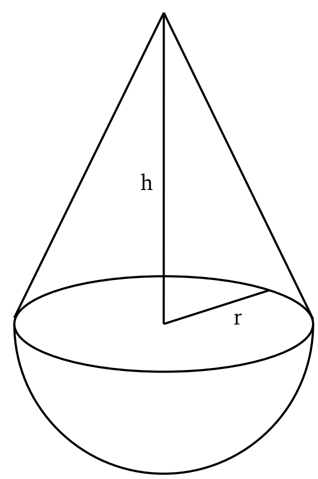
(**21**) Considera el cilindre (↺) i l'esfera (◯) següents:

Calcula l'àrea i el volum de

(a) ↺ amb $h = 2dm$ i $r = 12cm$
(b) ↺ amb $h = 3Hm$ i $r = 4Dm$
(c) ◯ amb $r = 3m$
(d) ◯ amb $r = 12cm$

(**22**) Considera el dipòsit (◯) i la 2^a figura (△) següents:





Calcula l'àrea i el volum de

(a) ◯ amb $a = 2dm$ i $b = 12cm$
(b) ◯ amb $a = 3Hm$ i $b = 18Dm$
(c) △ amb $r = 4m$ i $h = 3m$
(d) △ amb $r = 12cm$ i $h = 15cm$

(**23**) Sabent que l'Aresta d'un cub és de $5cm$, calcula l'àrea, el volum i la diagonal.

(**24**) L'aresta d'un cub fa $9cm$.

(a) quina és la distància entre els centres de dues cares oposades?
(b) quina és la distància entre els centres de dues cares contigües?
(c) Quina és la distància màxima entre dos vèrtexs?

(**25**) La base d'un prisma recte és un rombe de diagonals $5cm$ i $3cm$. L'aresta lateral mesura $9cm$. Quina és la seva superfície total?

(**26**) Troba la superfície lateral, total i el volum d'un prisma recte de base un triangle isòsceles. Els dos costats iguals d'aquests mesuren $5cm$ i són iguals a l'aresta lateral. El tercer costat de la base mesura $8cm$.

(**27**) Les bases d'un paral·lelepípede recte són dos paral·lelograms de costats $5cm$ i $6cm$. L'aresta lateral mesura $10cm$. Quina és la seva àrea total?

(**28**) La base d'un prisma recte és un triangle rectangle i isòsceles d'hipotenusa $8cm$ a l'igual que l'aresta lateral. Calcula la seva àrea lateral.

(**29**) Les bases d'un prisma recte són dos paral·lelograms de costats $35cm$ i $4dm$ respectivament i la seva aresta lateral és igual al perímetre de la base. Quina és la seva àrea lateral?

(**30**) Quin és el perímetre de la base d'un prisma recte sabent que la superfície lateral és de $45dm^2$ si la seva aresta lateral és de $50cm$?

(**31**) La base d'un paral·lelepípede recte és un rombe de $5cm$ de costat. La superfície lateral mesura $80cm^2$. Quant mesura la seva aresta lateral?

(**32**) Un prisma recte té per base un triangle equilàter de $5cm$ de costat i l'altura del prisma és de $14cm$. Quina és la seva superfície total i el seu volum?

(**33**) Un ortoedre fa de base $2m$ per $4m$. Troba l'altura de l'ortoedre sabent que l'àrea lateral és el doble de l'àrea d'una base.

(**34**) Trobar la diagonal, l'àrea i el volum d'un ortoedre que mesura $3m$ de llarg, $2m$ d'ample i $5m$ d'alt.

(**35**) Quant costarà recobrir de ciment una piscina ortoèdrica de $10m$ de llargada, $6m$ d'amplada i $2.5m$ de profunditat a raó de 15€ el m^2 ?

(**36**) El dependent d'una botiga embolica una capsa de sabates de $30cm$ de llarg, $20cm$ d'ample i $12cm$ d'alt amb un tros de paper, de forma que un 12% de l'embolcall queda solapat sobre si mateix. Quina quantitat de paper ha utilitzat?

(**37**) Tenim un prisma recte, les bases del qual són trapezis rectangles, de bases $20cm$ i $12cm$ i de costat oblic $10cm$. Sabent que l'altura del prisma és de $24cm$, calcula l'àrea total i el volum.

(**38**) Calcula la superfície d'un tetraedre regular de $10cm$ d'aresta.

(**39**) Trobar el volum d'una piràmide hexagonal de $3m$ de radi i $7m$ d'aresta lateral.

(**40**) La base d'una piràmide regular és un quadrat de $5cm$ de costat; la distància del vèrtex a un costat de la base és de $6cm$. Trobar l'àrea lateral, total i el volum.

(**41**) Trobar l'àrea total i el volum d'un piràmide regular de base quadrada en la que totes les arestes mesuren $6m$.

(**42**) La piràmide de Kheops té una base quadrada de $230m$ de costat i una altura de gairebé $137m$. Si la volguéssim recobrir tota de marbre, quina quantitat en necessitaríem?

(**43**) Trobar el volum d'un cilindre sabent que la circumferència de la base mesura $36cm$ i que la generatriu és igual al cub del radi.

(**44**) Hem construït un tub cilíndric, enganxant pels costats més curts un rectangle de cartolina de $30cm$ de llarg per $15cm$ d'ample. Quin és el diàmetre del tub?

(**45**) Un quadrat de $56cm$ de perímetre gira 360^o entorn del seu costat. Calcula el volum del cos engendrat.

(**46**) Calcula el volum d'un cilindre inscrit en un ortoedre de $10cm$ d'altura siguent la base un quadrat de $24cm$ de perímetre.

(**47**) El líquid contingut en un recipient cilíndric de $8cm$ de diàmetre i $20cm$ d'altura es tira dins d'un altre recipient també cilíndric de $6cm$ de diàmetre. Quina serà l'altura del líquid en aquest segon recipient?

(**48**) L'àrea lateral d'un cilindre de $15cm$ d'altura és de $90cm^2$. Calcula'n el radi de la base.

(**49**) Un pallasso vol posar-se un bonic barret cònic de $30cm$ d'altura. Suposant que el seu cap té un perímetre circular de $60cm$, calcula la superfície que tindrà el barret.

(50) Si fem girar un rectangle de dimensions $4cm$ per $6cm$ al voltant de cadascun dels costats obtenim dos cilindres rectes. Tenen la mateixa àrea i el mateix volum els dos cilindres?. Comprova-ho.

(51) Quants litres caben en un bidó cilíndric de $5dm$ de diàmetre i $0.8m$ d'altura?

(52) Calcula la superfície i el volum d'un con de $10cm$ de diàmetre de la base i $12cm$ de generatriu.

(53) Si fem girar un triangle rectangle de catets $3cm$ i $4cm$ al voltant de cadascun dels catets, obtenim dos cons. Tenen la mateixa àrea i el mateix volum els dos cons? Comprova-ho.

(54) Calcula la superfície i el volum d'una esfera de $18cm$ de diàmetre.

(55) Determina l'àrea i el volum de la superfície terrestre, admetent que la Terra té una forma esfèrica amb un radi de $6\,367Km$.

(56) Calcula el volum d'un grill de taronja de $10cm$ de diàmetre si saps que la taronja està formada per 12 grills iguals.

(57) Quants litres d'aire s'han d'escalfar per omplir un globus aerostàtic de forma esfèrica i de $10m$ de diàmetre?

(58) Introduïm una bola de pedra de $12cm$ de diàmetre en un recipient cúbic de $14cm$ d'aresta ple d'aigua i després en retirem la bola. Calcula:

(a) La quantitat d'aigua que ha vessat.

(b) L'altura de l'aigua en el recipient després de treure'n la bola.

(59) Una empresa química té quatre tancs esfèrics de $15m$ de diàmetre i 6 tancs cilíndrics de $20m$ d'alçada i $10m$ de radi a la base. Per evitar la corrosió, es contracta un equip d'operaris que cobra, per pintar dipòsits, 7€ per metre quadrat. Calcula el cost total de l'operació.

(60) Al nostre institut, es fàcil trobar-hi dos tipus de papereres, unes que mesuren $27cm$ d'altura i $37cm \times 25cm$ de base i unes altres cilíndriques que fan $30cm$ de diàmetre per $32cm$ d'altura. Quina té més cabuda sempre suposant que els papers es tirin a dins d'elles i no a fora?

(61) Al laboratori de ciències del primer pis del nostre institut s'utilitzen garrafes d'aigua destil·lada, unes que fan $26cm$ de diàmetre i $42cm$ d'altura i unes altres que fan $33cm$ de diàmetre i $50cm$ d'altura. En aquest moments només tenim 1 garrafa i mitja de les grans plenes i 3 de les petites. De quants litres d'aigua destil·lada disposem?

(62) Comprova la capacitat d'una llauna de Refresc a partir de les seves dimensions.

(63) ACTIVITAT: cal que construeixis amb cartolina un prisma i una piràmide de tipus i dimensions les que vulguis i calculis quina és la seva superfície lateral, total i el volum. Posa les mesures, els càlculs i els resultats sobre la cartolina de les mateixes figures. S'han d'entregar les dues figures en perfectes condicions.

6.7 Solucions

(1)
(a) $180min$
(b) $4980min$
(c) $438min$ $36s$
(d) comprova-ho
(e) 89h $52min$ $48s$ i comprova-ho
(f) $6min$
(g) 3h $15min$
(h) $42min$ $43s$
(i) comprova-ho
(j) 10 dies 12h $52min$

(2)
(a) $90min$
(b) $83min$
(c) 7^o $18min$
(d) comprova-ho
(e) 3 voltes 268^o 12min
(f) $12min$
(g) 4^o $55min$
(h) $41min$ $3s$
(i) comprova-ho
(j) 4 voltes 146^o $12min$ $37s$

(3)
(a) $18min$ $28s$
(b) 1° $23min$ $3s$

(c) $2°\ 56min\ 38s$
(d) $1°\ 50min\ 27s$
(e) $13min\ 52s$
(f) 1h $58min\ 47s$
(g) 2h $57min\ 24s$
(h) 6h $14min$
(i) $14min\ 24s$
(j) $30min\ 2s$
(k) 5h $39min\ 36s$
(l) 4h $25min\ 30s$
(m) $54s$
(n) $10min\ 10s$
(o) $18min\ 19s$
(p) $11min\ 14s$

(**4**) Completa-ho

(**5**) Construeix-ho

(**6**) Construeix-ho

(**7**) (a) $9dm^2$ (b) $350cm^2$ (c) $280Hm^2$ (d) $169m^2$ (e) $1040mm^2$ (f) $12Dm^2$

(**8**) $384m$

(**9**) $12.57cm^2$

(**10**) $60cm^2$

(**11**) $1385.44m^2$

(**12**) $272\,000m^2$

(**13**) $10mm^2$

(**14**) $35525m^2$

(**15**) (a) $700cm^2$ (b) $90mm^2$ (c) $200.96m^2$ (d) $452.16cm^2$ (e) $116.13cm^2$ (f) $19.3925dm^2$

(**16**) (a) $285dm^2$ (b) $2065cm^2$ (c) $784Dm^2$ (d) $460mm^2$ (e) $410cm^2$ (f) $8096dm^2$

(**17**) (a) $43.96m^2$ (b) $452.16cm^2$ (c) $356.48Hm^2$ (d) $557cm^2$ (e) $2400cm^2$ (f) $88Hm^2$

(**18**) (a) $1738.72m^2$ (b) $237.43cm^2$

(**19**) (a) $A = 1350m^2$ $V = 3375m^3$
(b) $A = 2904mm^2$ $V = 10648mm^3$
(c) $A = 253m^2$ $V = 210m^3$
(d) $A = 400Hm^2$ $V = 400Hm^3$
(e) $A = 528Hm^2$ $V = 0,48Hm^3$
(f) $A = 1872dm^2$ $V = 3360dm^3$

(**20**) (a) $1250cm^3$
(b) $36cm^3$
(c) $800m^3$
(d) $100Hm^3$
(e) $A = 301.44Dm^2$ $V = 301.44Dm^3$
(f) $A = 1205.76dm^2$ $V = 2411.52dm^2$

(**21**) (a) $A = 2411.52cm^2$ $V = 9043.2cm^3$
(b) $A = 854.08Hm^2$ $V = 1507.2Hm^3$
(c) $A = 113.04m^2$ $V = 113.04m^3$
(d) $A = 1808.64cm^2$ $V = 7234.56cm^3$

(**22**) (a) $A = 1205.76cm^2$ $V = 3165.12cm^3$
(b) $A = 2712.96Dm^2$ $V = 10682.28Dm^3$
(c) $A = 163.28m^2$ $V = 184.21m^3$
(d) $A = 1628.13cm^2$ $V = 5878.08cm^3$

(**23**) $A = 150cm^2$ $V = 125cm^3$ $D = 8,66cm$.

(**24**) (a) $9cm$ (b) $6.36cm$ (c) $15.59cm$

(**25**) $S = 120.12cm^2$

(**26**) $AL = 90cm^2$ $AT = 114cm^2$ $V = 60cm^3$

(**27**) $A = 280cm^2$

(**28**) $AL = 154.56cm^2$

(**29**) $AL = 22\,500cm^2$

(**30**) $p = 90cm$

(**31**) $a = 4cm$

(**32**) $S = 231.66cm^2$ $V = 151.62cm^3$

(**33**) $h = 1.33m$

(**34**) $D = 6.17cm$, $A = 62cm^2$ $V = 30cm^3$

(**35**) 2 100€

(**36**) $2\,688cm^2$

(**37**) $AT = 1541.44cm^2$ $V = 3\,521.28cm^3$

(**38**) $S = 173.21cm^2$

(**39**) $V = 49.30cm^3$

(**40**) $AL = 60cm^2$ $AT = 85cm^2$ $V = 45.42cm^3$

(**41**) $AT = 98.4cm^2$ $V = 51cm^3$

(**42**) $AL = 82\,280.2cm^2$

(**43**) $V = 103.15cm^3$

(**44**) $d = 9.55cm$

(**45**) $V = 8\,620.53cm^3$

(**46**) $V = 282.74cm^3$

(**47**) $a = 35.55cm$

(**48**) $r = 0.95cm$

(**49**) $S = 944.4cm^2$

(**50**) $157\,079l$

(**51**) $S = 267.04cm^2$ $V = 285.62cm^3$

(**52**) Comprova-ho.

(**53**) $S = 1017cm^2$ $V = 3053.63cm^3$

(**54**) $S = 5.094 \cdot 10^8 Km^2$ $V = 1.081 \cdot 10^{12} Km^3$

(**55**) Comprova-ho.

(**56**) $V = 43.63cm^3$

(**57**) $523\,600l$

(**58**) (a) $1\,839.23cm^3$ (b) $4.62cm$

(**59**) 98 960.12€

(**60**) La del primer tipus

(**61**) $131l$

(**62**) Comprova-ho.

Capítol 9

Successions

Comencem amb la definició que trobem a la **Wikipedia**:

"En matemàtiques, una successió és una llista ordenada d'objectes. Més formalment, s'anomena successió una aplicació definida en el conjunt dels nombres naturals, o un subconjunt seu, i que pren valors en un conjunt arbitrari. Si aquest altre conjunt és el dels nombres reals es diu que és una successió de nombres reals."

És una llista ordenada d'objectes. Nosaltres ens centrarem en una llista ordenada de nombres reals. Per exemple:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...$$

Podem generar tantes successions com vulguem i de les formes que vulguem:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... \qquad 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...$$

Però per poder-les estudiar, abans cal aprendre a crear-ne i inventar-ne. Per això utilitzarem l'scratch i aprendrem a programar per crear successions.

9.1 Definició

Una **successió** és un conjunt ordenat de nombres reals:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots$$

Cada element de la successió es diu **terme** de la successió. Per escriure'ls es fan servir subíndexs. Els termes de les successions es poden determinar a partir d'un determinat criteri, que es diu **regla de formació**.

Fixa't en aquest parell de successions:

Exemple 1

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$$

Primer terme: $a_1 = 4$
Segon terme: $a_2 = 7$
Tercer terme: $a_3 = 10$
Quart terme: $a_4 = 13$

Cada terme s'obté de l'anterior sumant-li 3:

$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
$a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
$a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$
$\ldots$

$$4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \ldots$$

Cada terme s'obté multiplicant el lloc que ocupa per 4:

$a_1 = 1 \cdot 4 = 4$
$a_2 = 2 \cdot 4 = 8$
$a_3 = 3 \cdot 4 = 12$
$a_4 = 4 \cdot 4 = 16$
$\ldots$

9.2 Terme General d'una successió

Diem **terme general** d'una successió al que ocupa qualsevol n, s'escriu a_n.
En algunes successions, el **terme general** és una expressió algebraica, que ens permet saber qualsevol terme de la successió si coneixem el lloc que ocupa, n.
En d'altres, cada terme s'obté a partir dels anteriors, es diu que estan donades en forma recurrent. Una **relació de recurrència** és una expressió algebraica, que dóna el terme n en funció dels anteriors.

EXERCICIS

(**1**) El primer terme d'una successió és 4. Escriu els seus quatre primers termes si: "Cada terme és igual a l'anterior més el lloc que ocupa".

(**2**) Escriu la regla de formació de la successió següent: $3,\ 8,\ 13,\ 18, \ldots$

(**3**) Escriu els cinc primers termes de la successió formada pels quadrats dels nombres naturals.

(**4**) Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

(**5**) Escriu els 5 primers termes d'una successió amb regla de formació: "Cada terme és la suma dels dos anteriors", sabent que $a_1 = 3$ i $a_2 = 7$.

(**6**) Escriu el terme general d'aquestes dues successions:

(a) $2, 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$

(b) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$

9.3 Progressions Aritmètiques

Una progressió aritmètica és una successió en què cada terme (llevat del primer) s'obté sumant a l'anterior una quantitat fixa, d, que es diu **diferència** de la progressió.
Si $d > 0$ els nombres cada cop són més grans, es diu que la progressió és **creixent**.
Si $d < 0$ els nombres cada cop són més petits, es diu que la progressió és **decreixent**.

$$7,\ 5,\ 3,\ 1,\ \ldots \longrightarrow d = -2 > 0 \longrightarrow \textbf{Decreixent}$$
$$2,\ 5,\ 8,\ 10,\ \ldots \longrightarrow d = 2 > 0 \longrightarrow \textbf{Creixent}$$

En una progressió aritmètica cada terme és igual a l'anterior més la diferència. Observa:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d \\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \\
&a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
&a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d
\end{aligned}$$

i així successivament, arribem a que el **terme general** d'una **progressió aritmètica** és:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

on a_1 és el primer terme i d la diferència.

Exemple 2

Sigui la següent successió: $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$

Observem que $a_1 = 3 \quad d = 2$, per tant, podem deduir que el terme general és:

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$$

D'aquesta manera, podem obtenir termes de la successió tant grans com vulguem:

$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 21$$
$$a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 = 201$$

Les progressions aritmètiques ens permeten poder calcular la suma de n termes que nosaltres vulguem. Això és degut a que en una progressió aritmètica finita de n termes, la suma de termes equidistants dels extrems és igual a la suma d'aquests extrems.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Si apliquem aquesta propietat s'obté que la **suma**, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, dels n **primers termes** d'una **progressió aritmètica**, és:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Exemple 3

Sigui la següent successió: $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$

I volem sumar aquests primers 6 termes. Sumem els extrems equidistants i comprovem que sumen el mateix:

$$2 + 12 = 4$$
$$4 + 10 = 14$$
$$6 + 8 = 14$$

Per tant,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 12}{2} \cdot 6 = 42$$

Exercicis

(**7**) Determina la diferència de les progressions aritmètiques següents:

(a) $1, 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots$ (b) $8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ \ldots$ (c) $2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \ldots$

(**8**) Escriu el terme general de les progressions aritmètiques següents:

(a) $4, 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$ (b) $3,\ -1,\ -5,\ -9,\ \ldots$ (c) $5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$

(**9**) Calcular la suma dels 10 primers termes de la progressió aritmètica: 2, 4, 6, 8, 10, ...

(**10**) Calcular la suma dels 20 primers termes de la progressió aritmètica: 3, 7, 11, 15, 19, ...

(**11**) El primer terme d'una progressió aritmètica de diferència 5 és 4 i l'últim terme és 499. Calcula la suma de tots els termes.

9.4 Progressions Geomètriques

Una **progressió geomètrica** és una successió en què cada terme (llevat del primer), s'obté multiplicant l'anterior per una quantitat fixa r, que es diu **raó** de la progressió.
La raó s'obté en fer el quocient entre dos termes consecutius:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Exemple 4

Sigui la següent successió: $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \ldots$, comprovem que té raó=2:

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

En una progressió geomètrica cada terme és igual a l'anterior multiplicat per la raó:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \end{aligned}$$

I si seguim així s'obté **el terme general d'una progressió geomètrica** de primer terme a_1 i raó r és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Exemple 5

Sigui la següent successió: $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$,

Comprovem que té $r = 3$ i el primer terme és $a_1 = 1$, per tant, el terme general serà $a_n = 3^{n-1}$.

9.4.1 Tipus de progessions geomètriques

Segons el valor de la raó, r, podem tenir diferents tipus de progressions:

- Si $r > 1$, la progressió és una successió creixent.
- Si $0 < r < 1$, la progressió és una successió decreixent.
- Si $r = 1$, la progressió és una successió constant.
- Si $r < 0$, els termes de la progressió alternen el signe positiu i negatiu.

9.4.2 Suma d'n termes d'una progressió geomètrica

En aquest cas també podem calcular la **suma** dels n **primers termes** d'una **progressió geomètrica** de raó r.
Si considerem la suma dels primers n termes de la successió:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

I multipliquem cada un dels termes per la raó r, obtenim:

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n \cdot r$$

Si restem les dues igualtats anteriors, obtenim:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 \Longrightarrow S_n(r-1) = a_n \cdot r - a_1 \Longrightarrow \boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}}$$

Exemple 6

Sigui la següent successió: $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$, obtenim que té $r = 2$, i volem sumar els primers 6 termes de la successió. Per tant, $n = 6$ i:

$$S_6 = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2-1} = \frac{63}{1} = 63$$

9.4.3 Producte d'n termes d'una progressió geomètrica

A més a més, en el cas d'una progressió geomètrica, podem calcular el producte el producte dels n **primers termes** de la progressió. Es pot calcular el producte a causa de que el producte dels termes equidistants dels extrems és igual al producte dels extrems:

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \cdots$$

El resultat del producte dels primers n termes d'una progressió geomètrica és:

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Exemple 7

Sigui la següent successió: $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$, en volem calcular el producte dels 6 primers termes. Primer comprovem que el producte dels termes equidistants dels extrems és igual al producte dels extrems:

$$1 \cdot 32 = 32 \quad 2 \cdot 16 = 32 \quad 4 \cdot 8 = 32$$

$$P = \sqrt{(1 \cdot 32)^6} = \sqrt{2^{30}} = 2^{15}$$

Exercicis

(**12**) Determina la raó de les progressions geomètriques següents:

(a) $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \dots$ (b) $81,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \dots$

(13) Escriu el terme general de les progressions geomètriques següents:

(a) $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ \dots$ (b) $8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \dots$

(14) Calcula la suma dels 10 primers termes de la progressió geomètrica: 1, 2, 4, 8, 16,...

(15) Calcula la suma dels termes d'una progressió geomètrica finita de primer terme 1, raó 3 i últim terme 243.

(16) Calcula la suma de tots els termes de la progressió geomètrica: 8, 4, 2, 1, ...

(17) Calcula el producte dels 8 primers termes de la progressió geomètrica: $\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \cdots$

9.5 Exercicis

(18) Completa les successions amb els termes que falten:

(a) $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \dots$ (c) $32,\ 16,\ 8,\ 4,\ \dots$
(b) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \dots$ (d) $5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \dots$

(19) Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:

(a) $a_n = n + 5$ (c) $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$
(b) $a_n = 2^{n-1}$ (d) $a_n = 5n$

(20) Calcula el terme general de les successions:

(a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots$ (c) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \dots$
(b) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots$ (d) $\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \dots$

(21) Troba el terme 100 de la successió de terme general:

(a) $a_n = 3n + 2$ (c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
(b) $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$

(22) Esbrina la llei de recurrència de cadascuna de les successions:

(a) $3,\ 7,\ 10,\ 17,\ 27,\ \dots$ (c) $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \dots$
(b) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \dots$ (d) $9,\ 3,\ 6,\ -3,\ 9,\ \dots$

(23) Calcula el terme general de les progressions aritmètiques següents:

(a) $4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \dots$ (c) $7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \dots$
(b) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots$ (d) $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \dots$

(24) Calcula el terme general de les progressions geomètriques següents:

(a) $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \dots$ (c) $16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \dots$
(b) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \dots$ (d) $\frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \frac{16}{81},\ \dots$

(25) Calcula la diferència d'una progressió aritmètica si se'n coneixen:

(a) $a_{10} = 30$ i $a_1 = -6$ (b) $a_{30} = 95$ i $a_{20} = 45$

(**26**) Calcula la raó d'una progressió geomètrica si se'n sap:

(a) $a_9 = 80$ i $a_8 = 16$ (b) $a_{10} = 40$ i $a_7 = 5$

(**27**) Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica si se'n sap:

(a) $a_{20} = 34$ i $d = 7$ (b) $a_{31} = 13$ i $d = 3$

(**28**) Calcula el primer terme d'una progressió geomètrica si se'n sap:

(a) $a_7 = 320$ i $r = 2$ (b) $a_6 = 915$ i $r = 3$

(**29**) Calcula el nombre de termes d'una progressió aritmètica finita si el primer és 100, l'últim 420 i la diferència és 4.

(**30**) Calcula la suma dels primers 101 termes de la progressió: 1, 4, 7, 17, 20,...

(**31**) Calcula la suma dels múltiples de 3 menors que 1000 i majors que 100.

(**32**) Calcula la suma dels primers 8 termes de la progressió: 1, 2, 4, 8, 16, ...

(**33**) Calcula el producte dels primers 8 termes de la progressió: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \cdots$

(**34**) Calcula la suma dels infinits termes de la progressió: 16, 8, 4, 2, 1, ...

(**35**) Calcula el producte dels primers 10 termes de la progressió 16, 8, 4, 2, 1, ...

(**36**) El nombre inicial de mosques d'una població és de 50 i cada tres dies es duplica el nombre de les mosques. Quantes mosques hi haurà al cap de 30 dies?

(**37**) Escriu la fracció generatriu de $1'\hat{2}$, aplicant la suma d'una progressió.

(**38**) En una progressió geomètrica el sisè terme val 64 i el quart és 16. Troba el terme general.

(**39**) Els angles d'un triangle estan en progressió aritmètica. Si el més petit és de 40^o, quina és la mesura dels altres dos ?

(**40**) Escriu el terme 95 de la successió: $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \cdots$

(**41**) Calcula la suma de tots els múltiples de 3 de tres xifres.

(**42**) La mare d'en Joan decideix guardar un euro al dia a partir de que en Joan fa un any. Anirà duplicant la quantitat en tots els aniversaris del seu fill. Quants diners haurà estalviat el dia que faci 16 anys?

9.6 Solucions

(**1**) $a_1 = 4,\ a_2 = 4 + 2 = 6,\ a_3 = 6 + 3 = 9,\ a_4 = 9 + 4 = 13$

(**2**) "Cada terme és igual a l'anterior més 5"

(**3**) $a_1 = 1,\ a_2 = 2^2 = 4,\ a_3 = 3^2 = 9,\ a_4 = 4^2 = 16,\ a_5 = 5^2 = 25$

(**4**) $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$

(**5**) $a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 3 + 7 = 10,\ a_4 = 7 + 10 = 17,\ a_5 = 10 + 17 = 27$

(**6**) (a) $a_n = 1 + n$, (b) $a_n = 2^n$

(**7**) (a) $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \quad d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$
(b) $d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$
(c) $d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

(8) (a) $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 2$
(b) $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 7$
(c) $a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$

(9) $a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2 + 9 \cdot 2 = 20, \quad S_{10} = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \dfrac{2+20}{2} \cdot 10 = 11 \cdot 10 = 110$

(10) $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19 \cdot 4 = 79, \quad S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \dfrac{3+79}{2} \cdot 20 = 41 \cdot 20 = 820$

(11) $a_1 = 4 \quad d = 5 \longrightarrow 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \dots$
Ara hem de calcular el nombre de termes:
$a_n = a_1 + (n-1)d \longrightarrow 499 = 4 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 1 \longrightarrow 5n = 500 \longrightarrow n = 100$

$$S_100 = \frac{4+499}{2} \cdot 100 = \frac{503}{2} \cdot 100 = 25150$$

(12) (a) $r = \dfrac{a_5}{a_4} = \dfrac{a_4}{a_3} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_2}{a_1}, \quad r = \dfrac{16}{8} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1} = 2$
(b) $r = \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}$

(13) (a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$
(b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$

(14) $r = \dfrac{a_2}{a_1} = 21 = 2 \longrightarrow S = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2-1} = \dfrac{1024-1}{1} = 1023$

(15) $a_1 = 1;\ a_n = 243;\ r = 3, \ \longrightarrow \ S = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{243 \cdot 3 - 1}{3-1} = \dfrac{728}{2} = 364$

(16) $a_1 = 8;\ r = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \ \longrightarrow \ S = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{8}{\frac{1}{2}} = 16$

(17) $a_1 = \dfrac{1}{8};\ r = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2;\ a_8 = \dfrac{1}{8}2^7 = 2^4 = 16 \quad P = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{8} \cdot 16\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

(18) (a) 19 i 23 (b) 48 i 96 (c) 2 i 1 (d) 37 i 50

(19) (a) 6, 7, 8, 9, ... (b) 1, 2, 4, 8, ... (c) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{5},\ \sqrt[5]{6},\ \cdots$ (d) 5, 10, 15, 20, ...

(20) (a) $a_n = n$ (b) $a_n = n^2$ (c) $a_n = \dfrac{1}{n}$ (d) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

(21) (a) $a_{100} = 302$ (b) $a_n = \dfrac{201}{99}$ (c) $a_n = \dfrac{1}{101}$

(22) (a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ (c) $a_{n+1} = a_n + 4$ (d) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

(23) (a) $a_n = 3n + 1$ (b) $a_n = 2n - 1$ (c) $a_n = 4n + 3$ (d) $a_n = n + 2$

(24) (a) $a_n = 2^{n+1}$ (b) $a_n = 3^{n-1}$ (c) $a_n = 2^{5-n}$ (d) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(25) (a) 8 (b) 5

(26) (a) 5 (b) 2

(27) (a) -99 (b) -77

(28) (a) 5 (b) 5

(29) 81

(30) 15100

(31) 165150

(32) 511

(33) 16

(34) 32

(35) $\dfrac{1}{32}$

(36) 16000

(37) $\dfrac{11}{9}$

(38) $a_n = 2^n$

(39) 60 i 80

(40) $\dfrac{104}{97}$

(41) 165150

(42) 8191

Apèndix A

Repàs de Nombres Enters

Els nombres **enters** són una extensió dels nombres naturals formada pels propis nombres naturals (1,2,3...), els seus corresponents negatius (-1,-2,-3...) i el nombre zero (0). El conjunt de tots els enters generalment es denota pel símbol $\mathbb{Z}$. Els nombres enters són un subconjunt dels nombres racionals.

A.1 Ordre de les operacions

En el següent quadre tenim l'ordre en que s'han de calcular les diferents operacions.

Ordre	Operacions	Simbols
1^r	Parèntesis	$(\ )$
2^n	Potències i Arrels	$3^2 \quad \sqrt[3]{27}$
3^r	Multiplicacions i Divisions	$\times \quad \div$
4^t	Sumes i Restes	$+ \quad -$

NOTA: Si cal que feu multiplicacions i divisions s'han de fer per ordre d'esquerra a dreta. El resultat de les operacions podria variar si no es fa així.

A.2 Exercicis

PROBLEMA RESOLT 1

$$6 \div (3 + 5 - 6) \cdot 6$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem cada una de les operacions.**
2^n. **Posem en pràctica la regla d'ordre d'operacions, fent una operació per pas.**

$$6 \div (3 + 5 - 6) \cdot 6 = 6 \div (8 - 6) \cdot 6 = 6 \div 2 \cdot 6 = 3 \cdot 6 = 18$$

3r. **Cal deixar clara la resposta de l'exercici, remarcant-la o requadrant-la.**
RESPOSTA: 18

(1) $3 \cdot 4 - 5$

(2) $3 \cdot (4 - 5)$

(3) $6 \cdot 9 + 10$

(4) $7 - 3 + 4$

(5) $7 - (3 + 4)$

(6) $6 + 9 - 3 \cdot 2$

(7) $18 \div 9 - 2 \cdot 4$

(8) $9 \cdot 5 + 3 \cdot (-5)$

(9) $2 - (-8 + 4)$

(10) $3 \cdot 5 - 4 \cdot 3$

(11) $3 \cdot (5 - 4) \cdot 3$

(12) $3 \cdot (5 - 4) \div 3$

(13) $7 - 3 \cdot 3 + 2$

(14) $15 - 3 \div 3 + 4$

(15) $25 \div 5 + 7$

(16) $25 \div (3 + 2) + 7$

(17) $5 \cdot (3 + 2) \div 5 + 7$

(18) $(7 - 10) + 4 \cdot 3$

(19) $(10 - 7) + 3 \cdot 4$

(20) $(3 - 5) \cdot (7 - 2)$

(21) $(5 - 3) \cdot (2 - 7)$

(22) $3 \cdot 5 + 7 \cdot 2$

(23) $3 \cdot 5 - 7 \cdot 2$

(24) $12 - 4 \div 4 - 2$

(25) $(12 - 4) \div 4 - 2$

(26) $3 \cdot 14 \div 7 - 5 \cdot 9$

(27) $3 \cdot 14 \div (7 - 5) \cdot 5$

(28) $20 \cdot 15 \div 25$

(29) $(18 - 12) \cdot 4$

(30) $18 - 12 \cdot 4$

(31) $6 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 8 - 2$

(32) $6 \cdot (3 + 8) - 5 \cdot (8 - 2)$

PROBLEMA RESOLT 2

$$5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 7^2$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem cada una de les operacions.**
2^n. **Posem en pràctica la regla d'ordre d'operacions, fent una operació per pas.**

$$5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 7^2 = 5 \cdot 9 - 6 \cdot 49 = 45 - 294 = -249$$

3^r. **Cal deixar clara la resposta de l'exercici, remarcant-la o requadrant-la.**
RESPOSTA: -249

(33) $4 \cdot 5^2 + 6 \cdot (5 - 4^2)$

(34) $(7 - 2) - 4 \cdot (8 - 2)$

(35) $3 + 5 \cdot 6 - (7 - 4)$

(36) $2 \cdot 8 \div 4 + 7 \cdot 3^2$

(37) $15 \div 5 + 5 \cdot 15$

(38) $4 + 4 \div 2 + 2^2 \cdot 1$

(39) $4 \div 4 + 2 \cdot 1 + 2^2$

(40) $4 + 4 \div 2 \cdot 1^2 + 2$

(41) $4 \div 4 + 2 \cdot 1^2 + 2$

(42) $-2 + 3 - (-2) + 5 - 6$

(43) $-4 + 8 - (-3) - 9 - 3$

(44) $22 + 3 - (-7) + 8 - 8$

(45) $11 + 31 - (-4) + 8 - (-3)$

(46) $-4 + 2 - (-5) + 8 - 1$

(47) $-32 + 35 - (-21) - 29$

(48) $-5 + 4 - (-3) - (-9) + 8$

(49) $-17 + 13 - (-7) - 19 - 8$

(50) $-14 - 32 - (-9) - (-1)$

(51) $-5 + 8 - (-3) + 9 - 2$

(52) $-2 - (+3) - (-2) + 2$

(53) $-1 + 1 - (-1) - 1 - 1$

(54) $22 + 22 - (-22) + 22$

(55) $111 + 31 - (-43) - (-38)$

(56) $7 \div 1 + (5 + 3) \cdot 2^2$

(57) $7^2 \div 7 + (3 + 5) \div 2^2$

(58) $3 \cdot (7 + 2 + 1) - 50 \div 5$

(59) $6 \div (3 + 5 - 6) \cdot 6$

(60) $(2 - 5) \cdot 4 + 3$

(61) $(-2) \cdot (4 + 5) - 6$

(62) $2 \cdot (4 - 5) - 6$

(63) $12 - 24 + 7 \div 7 + 1$

(64) $5 \cdot (-3) + 10 \div 2$

(65) $5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 7^2$

(66) $3 \cdot (4 - 5) - 22$

(67) $3 \cdot 4 - (5 - 22)$

(68) $(14 - 3) \cdot 3 \cdot 2^2$

(69) $2\sqrt[3]{64} \div 4$

(70) $9 \cdot 5 + 3 \cdot (13 - 5)$

PROBLEMA RESOLT 3

$$\sqrt{81} \cdot (20 - 4^2) \div 18$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem cada una de les operacions.**
2^n. **Posem en pràctica la regla d'ordre d'operacions, fent una operació per pas.**

$$\sqrt{81} \cdot (20 - 4^2) \div 18 = \sqrt{81} \cdot (20 - 16) \div 18 = \sqrt{81} \cdot 4 \div 18 = 9 \cdot 4 \div 18 = 36 \div 18 = 2$$

3^r. **Cal deixar clara la resposta de l'exercici, remarcant-la o requadrant-la.**
RESPOSTA: 2

PROBLEMA RESOLT 4

$$(27 - \sqrt[3]{27}) \cdot 3 + 3^2$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem cada una de les operacions.**
2^n. **Posem en pràctica la regla d'ordre d'operacions, fent una operació per pas.**

$$(27 - \sqrt[3]{27}) \cdot 3 + 3^2 = (27 - 3) \cdot 3 + 3^2 = 24 \cdot 3 + 3^2 = 24 \cdot 3 + 9 = 72 + 9 = 81$$

3^r. **Cal deixar clara la resposta de l'exercici, remarcant-la o requadrant-la.**
RESPOSTA: 81

PROBLEMA RESOLT 5

$$(2\sqrt{100} - 5) \div (20 \div \sqrt{10} + 1)$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem cada una de les operacions.**
2^n. **Posem en pràctica la regla d'ordre d'operacions, fent una operació per pas.**

$$(2\sqrt{100} - 5) \div (20 \div \sqrt{100} + 1) = (2 \cdot 10 - 5) \div (20 \div 10 + 1) = (20 - 5) \div (2 + 1) = 15 \div 3 = 5$$

3^r. **Cal deixar clara la resposta de l'exercici, remarcant-la o requadrant-la.**
RESPOSTA: 5

(**71**) $\sqrt{36} \cdot 20 - 3^2 \cdot 18$

(**72**) $\sqrt{81} \cdot (20 - 4^2) \div 18$

(**73**) $7^2 - \sqrt{25} \cdot 6 + 7$

(**74**) $3^2 \cdot 3 + 14 \div 7 - 2$

(**75**) $6^2 \div 3 - 4 \cdot 8 - \sqrt{16}$

(**76**) $\sqrt{16} \cdot (\sqrt{4} + 4^2) - 8$

(**77**) $21 + 7 \cdot 3 - (7^2 + \sqrt{49})$

(**78**) $4^3 - 12 + (\sqrt{4} + \sqrt{1})$

(**79**) $(24 - 12) \cdot 2^2 + \sqrt[3]{125}$

(**80**) $(25 - \sqrt{25}) \cdot 5 + 5^2$

(**81**) $(27 - \sqrt[3]{27}) \cdot 3 + 3^2$

(**82**) $6^2 + 5^2 \cdot (4^2 - 3^2)$

(**83**) $\sqrt{81} + 9 \cdot (\sqrt{64} - 3^2)$

(**84**) $\sqrt{(27 + 9)} \div 3 + 3$

(**85**) $(14 - \sqrt[3]{27}) \cdot 4 \div \sqrt{4}$

(**86**) $(\sqrt{100} + \sqrt{25}) \div 3$

(**87**) $(2\sqrt{100} + 5) \div 5$

(**88**) $3\sqrt{36} - 3 \cdot 6$

(**89**) $5\sqrt{100} - 2\sqrt{25 \cdot \sqrt[3]{125}}$

A.3 Factorització

La factorització és el procés de descomposar un nombre natural en un producte de nombres primers. Per exemple: $25 = 5^2$, $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ i $512568377 = 17^5 \cdot 19^2$. Donat que no existeix cap mètode general per saber si un nombre és primer o no i, a més, la quantitat de nombres primers és infinita, resulta que la factorització és un dels problemes més difícils i a la vegada importants de l'aritmètica entesa tant com teoria de nombres com a camp més general.

L'únic mètode que es coneix per factoritzar, consisteix en anar provant la divisibilitat d'un nombre per cadascun dels nombres primers que existeixen. Es comença provant pel 2, i després es segueix amb els primers immediatament superiors. Cada vegada que es troba un primer divisor, es divideix el nombre a factoritzar pel primer divisor, i es segueix cercant divisors primers per al quocient de la divisió. Aquest procés segueix fins que el quocient de la divisió és 1. Els factors primers són tots aquells pels quals s'ha dividit el nombre per arribar a 1.

$$\begin{array}{r|l} 2028 & 2 \\ 1014 & 2 \\ 507 & 3 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad 2028 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13^2$$

A vegades un nombre primer resulta ser tant gran que hem de provar la divisibilitat amb molts primers per arribar a la conclusió de que aquest nombre és primer. Convé veure aquí que en cap cas, donat un nombre x, trobarem un factor primer més gran que $\sqrt{x}$.

Criteris de Divisibilitat

1	Tots el nombres són divisibles per 1
2	Si el nombre és parell, és divisible per 2
3	Si la suma de les xifres del nombre és 3, 6, 9 ó multiple de 3, és divisible per 3
4	Si les dos últimes xifres formen un múltiple de 4, el nombre és divisible per 4
5	Si acaba en 5 ó 0
6	Si el nombre també és divisible per 2 i 3 alhora
7	No hi ha regles, cal fer la divisió
8	Si les 3 últimes xifres del nombre formen un múltiple de 8
9	Si la suma de les xifres és 9 o múltiple de 9
10	Si acaba en 0
11	Si la diferència de la suma de xifres que ocupen una posició parell menys les que ocupen una posició senar, és 0, 11 o múltiple de 11

Llista dels nombres primers

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 ...

Descomposa els següents nombres:

(**90**) 24	(**94**) 98	(**98**) 210	(**102**) 1024	(**106**) 442
(**91**) 36	(**95**) 124	(**99**) 360	(**103**) 184	(**107**) 391
(**92**) 80	(**96**) 144	(**100**) 512	(**104**) 243	(**108**) 899
(**93**) 96	(**97**) 196	(**101**) 880	(**105**) 343	(**109**) 988

A.4 Solucions

(**1**) 7
(**2**) -3
(**3**) 64
(**4**) 8
(**5**) 0
(**6**) 9
(**7**) -6
(**8**) 30
(**9**) 6
(**10**) 3
(**11**) 9
(**12**) 1
(**13**) 0
(**14**) 18
(**15**) 12
(**16**) 12
(**17**) 12
(**18**) 9
(**19**) 15
(**20**) -10
(**21**) -10
(**22**) 29
(**23**) 1
(**24**) 9
(**25**) 0
(**26**) -39
(**27**) 105
(**28**) 12
(**29**) 24
(**30**) -30
(**31**) -16
(**32**) 36
(**33**) 34
(**34**) -19
(**35**) 30
(**36**) 67
(**37**) 78
(**38**) 10
(**39**) 7
(**40**) 8
(**41**) 5
(**42**) 2
(**43**) -5
(**44**) 32
(**45**) 57
(**46**) 10
(**47**) -5
(**48**) 19
(**49**) -24
(**50**) -36
(**51**) 13
(**52**) -1
(**53**) -1
(**54**) 88
(**55**) 223
(**56**) 39
(**57**) 9
(**58**) 20
(**59**) 18
(**60**) -9
(**61**) -24
(**62**) -8
(**63**) -10
(**64**) -10
(**65**) -249
(**66**) -25
(**67**) 29
(**68**) 132
(**69**) 2
(**70**) 69
(**71**) -42
(**72**) 2
(**73**) 26
(**74**) 27
(**75**) -24
(**76**) 64
(**77**) -14
(**78**) 55
(**79**) 53
(**80**) 125
(**81**) 81
(**82**) 211
(**83**) 0
(**84**) 5
(**85**) 22
(**86**) 5
(**87**) 5
(**88**) 0
(**89**) 0
(**90**) $2^3 \cdot 3$
(**91**) $2^2 \cdot 3^2$
(**92**) $2^4 \cdot 5$
(**93**) $2^5 \cdot 3$
(**94**) $2 \cdot 7^2$
(**95**) $2^2 \cdot 31$
(**96**) $2^4 \cdot 3^2$
(**97**) $2^2 \cdot 7^2$
(**98**) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
(**99**) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
(**100**) 2^9
(**101**) $2^4 \cdot 5 \cdot 11$
(**102**) 2^{12}
(**103**) $2^3 \cdot 23$
(**104**) 3^5
(**105**) 7^3
(**106**) $2 \cdot 13 \cdot 17$
(**107**) $17 \cdot 23$
(**108**) $29 \cdot 31$
(**109**) $2^2 \cdot 13 \cdot 19$

Apèndix B

Repàs de Nombres Racionals

Si fem l'esquema dels conjunts de nombres que coneixem, obtindrem aquest:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Els Nombres Naturals, $\mathbb{N}$, més el 0 i els enters negatius formen el conjunt dels Nombres Enters, $\mathbb{Z}$.
Els Nombres Enters, $\mathbb{Z}$, més les fraccions formen el conjunt dels Nombres Racionals, $\mathbb{Q}$.
Els Nombres Racionals, $\mathbb{Q}$, més els irracionals formen el conjunts del Nombres Reals, $\mathbb{R}$.
I per finalitzar, els Nombres Reals, $\mathbb{R}$, més el imaginaris formen el conjunt de Nombres Complexes, $\mathbb{C}$.

S'anomena **nombre racional** a tot aquell nombre que pot ser expressat com a resultat de la divisió de dos nombres enters, amb el divisor diferent de 0.

Els racionals es caracteritzen per tenir un desenvolupament decimal (o en qualsevol base) finit o periòdic, és a dir que té un nombre de xifres decimals finit, o bé que aquestes es repeteixen de manera regular.

Els nombres racionals compleixen la propietat de la densitat. Això vol dir que per a qualsevol parella de nombres racionals existeix algun altre nombre racional situat entre els dos a la recta real $\mathbb{R}$. A més, $\mathbb{Q}$ és dens a $\mathbb{R}$, o sigui que entre dos reals diferents, sempre hi cap un racional. Es pot demostrar amb facilitat que el cardinal dels nombres racionals és el mateix que el dels enters, el que significa que no hi ha més racionals que enters.

B.1 Suma de Nombres Racionals

PROBLEMA RESOLT 1

$$\frac{11}{10} + \frac{3}{10}$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem que és una operació amb denominadors iguals, per tant, només ens cal sumar els numeradors i donar el resultat en forma de fracció irreductible.**

$$\frac{11}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11+3}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

RESPOSTA: $\frac{7}{5}$

(1) $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$

(2) $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$

(3) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$

(4) $\frac{2}{9} - \frac{4}{9}$

(5) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{6}{3}$

(6) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}$

(7) $\frac{15}{10} - \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$

(8) $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} - \frac{4}{8}$

PROBLEMA RESOLT 2

$$\frac{7}{10} + \frac{11}{18}$$

Procediment:

1^r. **Identifiquem que és una operació amb denominadors diferents**, per tant, primer haurem de trobar un denominador comú per aquests. Llavors el que haurem de fer és calcular $mcm(10,18)$ i per això haurem de factoritzar:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

2^n. **Calculem el $mcm(10,18)$ i els nous numeradors que en resultaran:**

> Per a calcular el **Màxim Comú Divisor** (mcd) i el **Mínim Comú Múltiple** (mcm), després de factoritzar:
> mcd: Cal multiplicar els factors comuns de menor exponent.
> mcm: Cal multiplicar els factors comuns pels no comuns tots ells elevats al major exponent.

$$mcm(10,18) = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 90$$

Càlcul dels nous numeradors:

$$7 \cdot \frac{90}{10} = 7 \cdot 9 \qquad 11 \cdot \frac{90}{18} = 11 \cdot 5$$

3^r. **Reescrivim l'operació amb els nou denominadors i amb el numeradors equivalents.**

$$\frac{7 \cdot 9}{90} + \frac{11 \cdot 5}{90}$$

4^t. **Resoldre i donar el resultat en forma de fracció irreductible.**

$$\frac{7 \cdot 9}{90} + \frac{11 \cdot 5}{90} = \frac{63}{90} + \frac{55}{90} = \frac{63+55}{90} = \frac{118}{90} = \frac{59}{45}$$

RESPOSTA: $\frac{59}{45}$

(9) $\frac{5}{8} + \frac{1}{6}$

(10) $\frac{2}{7} + \frac{3}{2}$

(11) $\frac{4}{9} + \frac{7}{12}$

(12) $\frac{7}{20} + \frac{14}{25}$

(13) $\frac{3}{2} + \frac{4}{5}$

(14) $\frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

(15) $\frac{4}{3} + \frac{5}{9}$

(16) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{15}$

(17) $\frac{7}{3} - \frac{12}{9} - \frac{10}{9}$

(18) $\frac{4}{5} - \frac{1}{10} - \frac{5}{10}$

(19) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} - \frac{4}{8}$

(20) $\frac{6}{5} + \frac{3}{10} - \frac{5}{2}$

(21) $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

(22) $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{15}$

(23) $\frac{5}{24} - \frac{7}{18} + \frac{1}{6}$

(24) $\frac{11}{32} + \frac{5}{24} - \frac{7}{20}$

(25) $\frac{3}{6} - \frac{4}{7} + \frac{5}{14}$

(26) $\frac{5}{6} + \frac{10}{21} - \frac{3}{14}$

(27) $\frac{3}{20} + \frac{7}{15} - \frac{13}{24}$

(28) $\frac{13}{12} - \frac{7}{18}$

(29) $\frac{7}{30} - \frac{39}{45} + \frac{17}{18}$

(30) $\frac{17}{20} - \frac{83}{100}$

(31) $\frac{4}{45} - \frac{35}{30}$

(32) $\frac{111}{162} - \frac{37}{108}$

(33) $\frac{401}{686} - \frac{723}{1029}$

(34) $\frac{78}{65} - \frac{122}{143}$

(35) $\frac{373}{400} - \frac{891}{1000} + \frac{103}{125}$

PROBLEMA RESOLT 3

$$\frac{5}{24} - \frac{7}{18} + \frac{1}{6}$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem que és una operació amb denominadors diferents**, per tant, primer haurem de trobar un denominador comú per aquests. Llavors el que haurem de fer és calcular $mcm(24, 18, 6)$ i per això haurem de factoritzar:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \qquad 6 = 2 \cdot 3$$

2^n. **Calculem el $mcm(24, 18, 6)$ i els nous numeradors que en resultaran:**

$$mcm(24, 18, 6) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Càlcul dels nous numeradors:

$$5 \cdot \frac{72}{24} = 5 \cdot 3 \qquad 7 \cdot \frac{72}{18} = 7 \cdot 4 \qquad 1 \cdot \frac{72}{6} = 1 \cdot 12$$

3^r. **Reescrivim l'operació amb els nou denominadors i amb el numeradors equivalents.**

$$\frac{5 \cdot 3}{72} - \frac{7 \cdot 4}{72} + \frac{1 \cdot 12}{72}$$

4^t. **Resoldre i donar el resultat en forma de fracció irreductible.**

$$\frac{5 \cdot 3}{72} - \frac{7 \cdot 4}{72} + \frac{1 \cdot 12}{72} = \frac{15}{72} - \frac{28}{72} + \frac{12}{72} = \frac{15 - 28 + 12}{72} = \frac{-1}{72}$$

RESPOSTA: $\frac{-1}{72}$

PROBLEMA RESOLT 4

$$\frac{401}{98} - \frac{723}{1029}$$

Procediment:
1^r. **Identifiquem que és una operació amb denominadors diferents**, per tant, primer haurem de trobar un denominador comú per aquests. Llavors el que haurem de fer és calcular $mcm(98, 1029)$ i per això haurem de factoritzar:

$$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 7^2 \qquad 1029 = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3 \cdot 7^3$$

2^n. **Calculem el $mcm(98, 1029)$ i els nous numeradors que en resultaran:**

$$mcm(98, 1029) = 2 \cdot 3 \cdot 7^3 = 2058$$

Càlcul dels nous numeradors:

$$401 \cdot \frac{2058}{98} = 401 \cdot 21 \qquad 723 \cdot \frac{2058}{1029} = 723 \cdot 2$$

3^r. **Reescrivim l'operació amb els nous denominadors i amb el numeradors equivalents.**

$$\frac{401 \cdot 21}{2058} - \frac{723 \cdot 2}{2058}$$

4^t. **Resoldre i donar el resultat en forma de fracció irreductible.**

$$\frac{401 \cdot 21}{2058} - \frac{723 \cdot 2}{2058} = \frac{8421}{2058} - \frac{1446}{2058} = \frac{8421 - 1446}{2058} = \frac{6975}{2058} = \frac{2325}{686}$$

RESPOSTA: $\frac{2385}{686}$

B.2 Producte de Nombres Racionals

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Multipliquem numerador per numerador i denominador per denominador, i després simplifiquem si es pot:

$$\frac{20}{9}\cdot\frac{21}{10}=\frac{20\cdot 21}{9\cdot 10}=\frac{420}{90}=\frac{42}{9}=\frac{14}{3}$$

També podem simplificar abans de multiplicar:

$$\frac{20}{9}\cdot\frac{21}{10}=\frac{20\cdot 21}{9\cdot 10}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 1}=\frac{14}{3}$$

(36) $\frac{6}{5}\cdot\frac{35}{18}$

(37) $\frac{7}{16}\cdot\frac{20}{49}$

(38) $\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{7}$

(39) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}$

(40) $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}$

(41) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}$

(42) $\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{45}\cdot\frac{9}{2}$

(43) $\frac{4}{45}\cdot\frac{35}{30}$

(44) $\frac{84}{25}\cdot\frac{10}{21}$

(45) $\frac{36}{49}\cdot\frac{21}{50}$

(46) $\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{35}\cdot\frac{1}{5}$

B.3 Divisió de Nombres Racionals

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Per fer la divisió hem d'aplicar la regla del caramel, i simplificar quan es pugui,

$$\frac{40}{27}:\frac{30}{63}=\frac{40\cdot 63}{27\cdot 30}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 3}=\frac{28}{9}$$

(47) $\frac{343}{243}:\frac{98}{54}$

(48) $\frac{3}{8}\cdot\frac{10}{21}:\frac{49}{15}$

(49) $\frac{111}{162}:\frac{37}{108}$

(50) $\frac{3}{6}:\frac{8}{12}$

(51) $\frac{7}{3}:\frac{1}{2}$

(52) $\frac{1}{5}:\frac{3}{6}$

(53) $\frac{2}{5}:2$

(54) $\frac{6}{3}:3$

(55) $\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\right)$

(56) $\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\right)$

(57) $\frac{7}{3}:\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}$

(58) $\left(\frac{21}{20}\cdot\frac{10}{7}\right)^3$

B.4 Exponents negatius

L'exponent negatiu d'un nombre racional ens està expressant el mateix nombre racional invers amb exponent positiu. És a dir,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}$$

On considerem l'invers de $\frac{4}{5}$ com $\frac{5}{4}$

PROBLEMA RESOLT 5

$$\frac{7}{3} \div \frac{1}{5} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

Procediment:
1^r. **Igual que en el capítol anterior, apliquem les regles d'operacions** i resolem primer el parèntesis i més tard la divisió i la multiplicació:

$$\frac{7}{3} \div \frac{1}{5} + \left(\frac{8-3}{12}\right) - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{3} + \frac{8-3}{12} - \frac{4}{6} = \frac{35}{3} + \frac{5}{12} - \frac{4}{6}$$

2^n. Quan ja es té l'operació com una suma i resta de fraccions, **calculem el** $mcm(3,12,6)$. Aquest càlcul ens el podem estalviar ja que hi ha dos dels nombres que són divisors de l'altre, el nombre més gran serà el resultat del mcm. **També calculem el nous numeradors que en resultaran.**

$$mcm(3,12,6) = 12$$

Càlcul dels nous numeradors:

$$35 \cdot \frac{12}{3} = 35 \cdot 4 \qquad 5 \cdot \frac{12}{12} = 5 \qquad 4 \cdot \frac{12}{6} = 4 \cdot 2$$

3^r. **Reescrivim l'operació amb els nous denominadors i amb el numeradors equivalents i donem el resultat en forma de fracció irreductible.**

$$\frac{35 \cdot 4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{4 \cdot 2}{12} = \frac{140 + 5 - 8}{12} = \frac{137}{12}$$

RESPOSTA: $\frac{137}{12}$

PROBLEMA RESOLT 6

$$\frac{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right)^{-2} + 3}{\frac{5}{18} - 1}$$

Procediment:
1^r. En aquest exercici hem de visualitzar dos parts principals amb operacions totalment diferenciades entre elles. La part d'operacions que estan en el numerador i la part d'operacions que es troben en el denominador. **L'objectiu per tant serà obtenir una fracció per a cada una d'aquestes parts. Quan tinguem aquest pas assolit, només mancarà fer una divisió de fraccions.**

2^n. **Centrem-nos en la part del numerador:**

$$\frac{(\frac{2}{5} - \frac{1}{10})^{-2} + 3}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{(\frac{4-1}{10})^{-2} + 3}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{(\frac{3}{10})^{-2} + 3}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{(\frac{10}{3})^{2} + 3}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{\frac{100}{9} + 3}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{\frac{100}{9} + \frac{27}{9}}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{\frac{127}{9}}{\frac{5}{18} - 1}$$

3^r. **I una vegada tenim la part del numerador resolta, anem a resoldre la part del denominador:**

$$\frac{\frac{127}{9}}{\frac{5}{18} - 1} = \frac{\frac{127}{9}}{\frac{5}{18} - \frac{18}{18}} = \frac{\frac{127}{9}}{\frac{-13}{18}}$$

4^t. **Finalment, si ens hi fixem el que tenim és una operació de divisió entre dos fraccions. Resolem la divisió.**

$$\frac{\frac{127}{9}}{\frac{-13}{18}} = \frac{127 \cdot 18}{9 \cdot (-13)} = \frac{127 \cdot 2}{1 \cdot (-13)} = \frac{254}{-13}$$

RESPOSTA: $\frac{-254}{13}$

(**59**) $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{15}\right)^{-4}$

(**60**) $\dfrac{1-\frac{3}{2}}{\frac{4}{15}-2}$

(**61**) $\left(\frac{9}{20} - \frac{13}{15}\right)^{2} + \frac{5}{48} \cdot 6$

(**62**) $\frac{11}{18}\left(\frac{11}{2} - \frac{11}{3}\right)^{-2}$

(**63**) $\dfrac{\frac{9}{10} - 3\cdot\frac{5}{8}}{\frac{5}{4}+\frac{3}{10}}$

(**64**) $\dfrac{\left(\frac{5}{4} - 2\cdot\frac{3}{12}\right)^{-3} - \frac{10}{3^3}}{\frac{1}{14}-\frac{1}{21}}$

(**65**) $\dfrac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{-3} - \frac{120}{7} : \frac{3}{35}}{2^4 - 2^3 - 2^2 - 2^1 - 2^0}$

(**66**) $\dfrac{\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right)^{-2} + 1}{\frac{5}{18} - 2}$

(**67**) $\frac{7}{20} + \frac{5}{24} - \frac{13}{18}$

(**68**) $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 8 - \frac{2}{3}}{\frac{7}{10}+\frac{9}{15}}$

(**69**) $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot 27 - 5}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}}$

(**70**) $\left(\frac{30}{7} \cdot \frac{49}{60}\right)^{-2}$

(**71**) $\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{12}\right)^{-2}$

(**72**) $\frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} + \frac{3}{8}$

(**73**) $\frac{-4}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{2}$

(**74**) $\frac{1}{5} \cdot \frac{7}{9} : \frac{11}{6}$

(**75**) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \frac{28}{45} - \frac{3}{10}$

(**76**) $\frac{-7}{6} + \frac{5}{8} \cdot 3$

(**77**) $\frac{11}{16} - \frac{5}{12} \cdot 5$

(**78**) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{64}{75} - \frac{3}{5}$

(**79**) $\left(\frac{17}{18} - \frac{49}{45}\right) \cdot \left(\frac{13}{3}\right)^{-2}$

(**80**) $\left(\frac{97}{132} - \frac{103}{220}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

(**81**) $\dfrac{\frac{302}{495} - \frac{69}{110}}{\frac{34}{165}}$

B.5 Solucions

(**1**) $\frac{5}{2}$

(**2**) $\frac{-4}{5}$

(**3**) $\frac{3}{2}$

(**4**) $\frac{2}{3}$

(**5**) $\frac{1}{3}$

(**6**) $\frac{7}{9}$

(**7**) $\frac{2}{5}$

(**8**) 1

(**9**) $\frac{19}{24}$

(**10**) $\frac{25}{14}$

(**11**) $\frac{37}{36}$

(**12**) $\frac{91}{100}$

(**13**) $\frac{23}{10}$

(**14**) $\frac{11}{24}$

(**15**) $\frac{17}{9}$

(**16**) $\frac{23}{15}$

(**17**) -1

(**18**) $\frac{-1}{9}$

(**19**) $\frac{1}{5}$

(**20**) $\frac{7}{8}$

(**21**) $\frac{3}{4}$

(**22**) $\frac{8}{5}$

(**23**) $\frac{-1}{72}$

(**24**) $\frac{97}{480}$

(**25**) $\frac{2}{7}$

(**26**) $\frac{23}{21}$

(**27**) $\frac{3}{40}$

(**28**) $\frac{25}{36}$

(**29**) $\frac{14}{45}$

(**30**) $\frac{1}{50}$

(**31**) $\frac{-97}{90}$

(**32**) $\frac{37}{108}$

(**33**) $\frac{-81}{686}$

(**34**) $\frac{248}{715}$

(**35**) $\frac{1731}{2000}$

(**36**) $\frac{7}{3}$

(**37**) $\frac{5}{28}$

(**38**) $\frac{20}{21}$

(**39**) $\frac{1}{8}$

(**40**) $\frac{10}{3}$

(**41**) $\frac{1}{25}$

(**42**) 1

(**43**) $\frac{14}{135}$

(**44**) $\frac{8}{5}$

(**45**) $\frac{54}{175}$

(**46**) $\frac{9}{700}$

(**47**) $\frac{7}{9}$

(**48**) $\frac{75}{1372}$

(**49**) 2

(**50**) $\frac{3}{4}$

(**51**) $\frac{14}{3}$

(**52**) $\frac{2}{5}$

(**53**) $\frac{1}{5}$

(**54**) $\frac{2}{3}$

(**55**) $\frac{19}{14}$

(**56**) $\frac{45}{16}$

(**57**) $\frac{34}{3}$

(**58**) $\frac{27}{8}$

(**59**) 81

(**60**) $\frac{15}{52}$

(**61**) $\frac{115}{144}$

(**62**) $\frac{2}{11}$

(**63**) $\frac{-39}{62}$

(**64**) 84

(**65**) 16

(**66**) $\frac{-218}{31}$

(**67**) $\frac{-59}{360}$

(**68**) 4

(**69**) $\frac{49}{6}$

(**70**) $\frac{4}{49}$

(**71**) 576

(**72**) $\frac{137}{216}$

(**73**) $\frac{181}{112}$

(**74**) $\frac{14}{165}$

(**75**) $\frac{9}{5}$

(**76**) $\frac{17}{24}$

(**77**) $\frac{-67}{48}$

(**78**) $\frac{71}{15}$

(**79**) $\frac{-1}{130}$

(**80**) $\frac{5}{3}$

(**81**) $\frac{-1}{12}$

Apèndix C

Repàs d'equacions de primer grau

Una **equació** és una igualtat entre expressions matemàtiques que només és certa per a certs valors de les variables que formen aquestes expressions. Aquestes variables s'anomenen normalment incògnites. Els valors que poden prendre les incògnites s'anomenen solucions de l'equació i solucionar una equació vol dir trobar aquests valors. Per exemple

$$3x - 5 = 7$$

és una equació d'una sola incògnita, la x. Com es pot comprovar fàcilment, qualsevol valor de x no compleix l'equació, només un valor, $x = 4$, que és la seva solució.

Habitualment es reserven les lletres del final de l'alfabet, x, y, z, etc. per indicar les incògnites de les equacions.

A les dues expressions que igualem se les anomena termes de l'equació. En la majoria de casos una equació tindrà només dos termes.

En el cas en què es tinguin diverses equacions que s'han de verificar simultàniament, es parla de sistemes d'equacions. Segons la potència màxima a que està elevada la incògnita de l'equació es parla d'**equacions de primer grau**, equacions de segon grau, etc.

C.1 Problemes i Equacions

(**1**) El perímetre d'un quadrat fa $44m$. Quant fa de costat?

(**2**) Busca dos nombres que sumen 110, sabent que la seva diferència és de 36 unitats.

PROBLEMA RESOLT 1

Explicarem com podem resoldre aquest equació:

$$x + 8 = 13$$

Primer de tot, hem d'aïllar la x. Per tant, el que volem és treure el 8 de la part de l'esquerra de l'igual. Per passar-lo a l'altre costat ens cal canviar-lo de signe, com que tenim un $+8$ passarem a tenir un -8 a l'altra banda:

$$x + 8 = 13$$

$$x = 13 - 8$$

Finalment fem les operacions que podem, i obtenim el resultat final:

$$x = 5$$

PROBLEMA RESOLT 2

La suma d'un nombre amb el seu doble és 78. Quin és aquest nombre?

Procediment:
1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quin és aquest nombre?
2^n. **Definim la variable o incògnita:** x = nombre
3^r. **Escrivim en llenguatge algèbric:**
La suma d'un nombre, x, amb el seu doble, $2x$, és 78: $x + 2x = 78$
4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} x + 2x &= 78 \\ 3x &= 78 \\ x &= \frac{78}{3} \\ x &= 26 \end{aligned}$$

$5^{\text{è}}$. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: El número és el 26

(**3**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El doble de x és 20.
(b) La meitat de x és 36.
(c) La suma de x i 17 és 24.
(d) La diferència entre 127 i x és 54.
(e) x entre 12 és 5.

(**4**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El producte de x per 3 és 15
(b) La tercera part de x és 18.
(c) La tercera part de $2x$ és 14.
(d) Dos terços de x són 6.
(e) El doble de x menys 3 és 43.

(**5**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) 1 menys el doble de x és 5.
(b) El triple d'un nombre menys quatre unitats són 74.
(c) 26 vegades un nombre menys 50 és igual al propi nombre.
(d) El doble d'un nombre menys el mateix és 26.
(e) La meitat d'un nombre més el seu doble és igual a 10.

(**6**) $4x - 24 = 0$

(**7**) $7x + 21 = 0$

(**8**) $3x - 2 = 0$

(**9**) $9x + 6 = 0$

(**10**) $8x - 12 = 0$

(**11**) $12x + 20 = 0$

(**12**) $23x + 69 = 0$

(**13**) $54x - 90 = 0$

(**14**) $30x - 18 = 0$

(**15**) $144x + 1024 = 0$

(**16**) $7x - 15 = 0$

(**17**) $8x - 7 = 57$

(**18**) $7x + 5 = 6x + 14$

(**19**) $8x - 3 = 6x + 7$

(**20**) $4x + 8 = x - 4$

(**21**) $5x + 13 = 3x + 5$

(**22**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El doble d'un nombre és 14.

(b) El triple d'un nombre és 75.

(c) Un nombre menys set unitats és 19.

(d) Un nombre més quatre unitats és 56.

(e) La quarta part d'un nombre és 3.

(**23**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El triple d'un nombre menys quatre unitats és 5.

(b) La meitat d'un nombre més dos unitats és 17.

(c) El doble de la suma d'un nombre i 3 és 12.

(d) El triple de la suma d'un nombre i 2 és 9.

(e) La meitat de la diferència entre un nombre i 7 és 24.

(**24**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El doble d'un nombre menys 5 és igual a aquest nombre més 7.

(b) El triple d'un nombre més 4 és igual al doble d'aquest nombre menys 5.

(c) Un nombre menys una unitat és igual a quatre vegades aquest nombre més 2 unitats.

(d) El triple de la suma d'un nombre i 5 unitats és igual a 19 menys aquest nombre.

(e) La cinquena part de la diferència entre un nombre i 3 és 4.

(**25**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) 5 vegades la suma d'un nombre més 2 és 15.

(b) El triple de la diferència entre un nombre i 5 és 6.

(c) Un nombre menys quatre vegades ell mateix és igual al triple del nombre menys 1.

(d) La meitat de la diferència entre 8 i el doble d'un nombre és igual a la quarta part de la suma daquest nombre i 7.

(e) El doble d'un nombre és igual a aquest nombre més 5.

(**26**) Quin nombre multiplicat per 7 dóna 245?

(**27**) Si al doble dels diners que tinc li sumo 72€, obtinc 196€. Quants diners tinc?

(**28**) El triple d'un nombre més 7 és 43. Calcula'l.

PROBLEMA RESOLT 3

En una llibreria, comprem 3 llibres del mateix preu i 5 llibretes a 3€ cada una. En total paguem 36€. Quant val cada llibre?

Procediment:
1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quan val cada llibre?
2^n. **Definim la variable o incògnita:** $x =$ preu de cada llibre
3^r. **Escrivim en llenguatge algèbric:**
En una llibreria, comprem 3 llibres del mateix preu i 5 llibretes a 3€cada una.
En total paguem 36€: $3x + 5 \cdot 3 = 36$
4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} 3x + 5 \cdot 3 &= 36 \\ 3x + 15 &= 36 \\ 3x &= 36 - 15 \\ 3x &= 21 \\ x &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

$5^{è}$. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: Cada llibre val 7€

PROBLEMA RESOLT 4

En preguntar-li l'edat a en David, ens respon: "Si al doble de la meva edat li restem 17 anys s'obté el que em falta per arribar a 100 anys". Quina edat té?

Procediment:
1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quina edat té?
2^n. **Definim la variable o incògnita:** $x =$ edat d'en David
3^r. **Escrivim en llenguatge algèbric:**
Si al doble de la meva edat li restem 17 anys s'obté el que em falta per arribar a 100 anys: $2x - 17 = 100 - x$
4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} 2x - 17 &= 100 - x \\ 2x + x &= 100 + 17 \\ 3x &= 117 \\ x &= \frac{117}{3} \\ x &= 39 \end{aligned}$$

$5^{è}$. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: En David té 39 anys

(**29**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El doble de x més 3 és igual a 5.
(b) El doble de x menys 4 és igual al triple de x més 2.
(c) La meitat de x menys 9 és igual a 5.
(d) La meitat de la diferència entre x i 2 és 15.
(e) El doble de la suma de x i 4 és 18.

(**30**) Troba un nombre que augmentat en 17 doni 43.

(**31**) Troba un nombre tal que en restar-li 31 doni com a resultat 13.

(**32**) Troba un nombre que sumat a 15 doni el triple de 23.

(**33**) El perímetre d'un triangle equilàter és 81 m. Troba quant fa el seu costat.

PROBLEMA RESOLT 5

Resolem ara la següent equació amb parentèsi:

$$4(x-2) = 12 - x$$

Primer de tot hem de multiplicar el 4 per tot el que hi ha dins el parèntesi tenint molt en compte els signes:

$$4(x-2) = 12 - x$$

$$4 \cdot x - 4 \cdot 2 = 12 - x$$

I l'acabem resolent tal i com sabem:

$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 12 - x \\ 4x + x &= 12 + 8 \\ 5x &= 20 \\ x &= \frac{20}{5} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(**34**) $3x + 1 = 4x - 7$

(**35**) $12 - x = 4x - 3$

(**36**) $35 - 2x = 3x - 45$

(**37**) $6x - 13 = 15 - 8x$

(**38**) $9x - 3 = 22x - 42$

(**39**) $15x - 128 = 22$

(**40**) $210x - 505 = 10x + 95$

(**41**) $25x - 15 = 90 - 45x$

(**42**) $5x + 8 = 4x + 12$

(**43**) $7x + 9 = 8x + 2$

(**44**) $18 - 2x = 5x + 4$

(**45**) $52 + 13x = 65 - 78x$

(**46**) $250 - 20x = 55x + 25$

(**47**) $4120 - 58x = 24 + 6x$

(**48**) $x + 3(x - 2) = 3x - 1$

(**49**) $205 = 3x - (15 + 8x)$

(**50**) $7 + 5(6 - 2x) = 5x - 8$

(**51**) $140 = 7x - (13 - 2x)$

(**52**) $12(x - 2) + 7(x + 2) = 9$

(**53**) $2x - 5 = 3 - 6(-22 - 2x)$

(**54**) $4(9 + 27x) = 18x + 6$

(**55**) $6 - 3x = 3(4 - 5x)$

(**56**) $5(35 - 8x) = 6(3x - 30) + 7$

(**57**) $4x - 2(x + 8) = 2x + 3(4 - x)$

(**58**) $x - 2(x - 1) + 3(4 - 2x) = 3x + 2(x - 5)$

(**59**) $3x - (x + 2) + 7 = 2(x + 4) - 3x - (2 - 5x)$

(**60**) $2(x - 3) - 3(x - 4) = 1$

(**61**) $8(3x - 2) - 4(4x - 3) = 6(4 - x)$

(**62**) Amb 7 bitllets iguals tenim 350€. Quin és el valor de cada bitllet?

(**63**) Si al triple d'un nombre li restem 13 unitats, obtenim 86. Quin és aquest nombre?

(**64**) Si a un nombre li afegim el quàdruple té com a resultat 225. Quin nombre és aquest?

(**65**) La diferència entre un nombre i el seu doble és -4. Quin és aquest nombre?

(**66**) El doble d'un nombre més el seu triple dóna 125. Quin és aquest nombre?

(**67**) La meitat dels conills d'una gàbia sumen 36 potes. Quants conills hi ha?

(**68**) Troba un nombre que sigui igual al seu triple menys 16.

(**69**) Troba un nombre tal que després de sumar-li 72 dóna com a resultat el doble menys 46 unitats.

(**70**) Busca un nombre el quàdruple del qual és igual al mateix nombre augmentat en 36 unitats.

(**71**) El doble d'un nombre més 5 és igual al seu triple menys 19. Quin és aquest nombre?

(**72**) Troba un nombre tal que el seu doble augmentat en una unitat sigui igual al seu triple disminuït en tres unitats.

(**73**) Si a un nombre hi sumem el seu triple i el seu doble, el resultat és 54. Quin és aquest nombre?

(**74**) El perímetre d'un quadrat després d'augmentar $5cm$ el costat és $168cm$. Quina és la mida del costat del quadrat inicial?

(**75**) En un rectangle, un costat és quatre vegades més gran que l'altre, i el perímetre és $100cm$. Calcula les longituds de cada costat.

(**76**) Troba un nombre el triple del qual menys 5 sigui igual a la seva meitat.

(**77**) Troba un nombre el doble del qual més el seu triple menys la seva meitat menys la seva tercera part sigui 1875.

(**78**) Troba un nombre si sabem que 11 vegades aquest nombre més 10 unitats és igual a 14 vegades aquest nombre menys cinc unitats.

(**79**) Si sumem 9 a un nombre i dividim el resultat entre 5, obtenim el mateix que si restem 9 i dividim el resultat entre 2. De quin nombre es tracta?

(**80**) $2x + 5 = 35 - 4x$

(**81**) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$

(**82**) $2[x - 3(x - 1)] + 3 = x - 3(x + 1)$

(**83**) $x + 2 - (2 - x) = 2x - 1 - (1 - 2x)$

(**84**) $2[x + 2(3x - 2)] = 4x + 16$

(**85**) $5(x - 3) = 10$

(**86**) $1 - 3x = 4x + 5 - (4 - x)$

(**87**) $15x - 5(x - 1) = 120 - 5x$

(**88**) $7 + 3(2 + x) - 3x = 9 + 2x$

(**89**) $4 - 2(x + 3) = 13 - 5(x + 4)$

(**90**) $1 - 3x - 2(x - 1) = 5(1 - 2x) + 7$

(**91**) $4(x-4)+4x-4(4-x) = 4(4x-4)+4(4-4x)$

(**92**) $3 - 4(x - 5) + 2x = 5 + 3(x + 1)$

(**93**) $4 - (-6 - x) - 3x = 5 - 2x - (4x + 3)$

(**94**) $3(x + 1) + 4(x + 3) = 22$

(**95**) $7(x + 2) + 9(x + 6) = 116$

(**96**) $4(x + 4) + 6(x + 5) = 66$

(**97**) $5(x + 8) + 3(x + 1) = 99$

(**98**) $6(2x + 9) + 2(4x - 1) = 112$

(**99**) $2(7x - 1) + 8(3x + 5) = 304$

(**100**) $3(2x + 9) + 7(x - 2) = 26$

(**101**) $8(5x - 3) + 3(2x + 6) = 86$

(**102**) La quarta part dels meus diners menys 50€ són 120€. Quants diners tinc?

(**103**) Calcula el nombre que sumat a la seva meitat fa 81.

(**104**) La tercera part de la meva edat sumada a la seva meitat són 15 anys. Quina edat tinc?

(**105**) La meitat d'un nombre menys 5 unitats fa 23. Quin és aquest nombre?

(**106**) Un nombre augmentat en la tercera part dóna 72. Quin és aquest nombre?

(**107**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) 5 menys el doble de la suma de x i 4 és igual a 3.

(b) quatre vegades la diferència entre x i 2 més el doble de la suma de x i 3 és 10.

(c) La meitat de la diferència entre 5 i x és igual a la tercera part de la suma de x i 5.

(d) El triple de la suma de 6 i el doble de x, menys el doble de la diferència entre x i 4 és 2.

(e) Sis més el doble de la diferència entre x i 3 és igual a la cinquena part de la suma de x i 9.

(**108**) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

(a) El triple d'un nombre sumat a la meitat del mateix nombre dóna com a resultat 14.

(b) La quarta part del nombre de pàgines d'un llibre sumada a 189 ens dóna el nombre total de pàgines del llibre.

(**109**) Quin nombre disminuït en $\frac{1}{3}$ d'ell mateix dóna 2?

(**110**) A 1^r d'ESO hi ha 13 noies més que nois. Si en total hi ha 83 alumnes, quantes noies hi ha?

(**111**) En un ball hi ha 5 noies més que nois. Si en total a la pista hi ha 77 persones, quants són nois i quantes són noies?

(**112**) La base d'un rectangle és el doble que l'altura, i el seu perímetre és $78cm$. Quines són les dimensions del rectangle?

(**113**) El perímetre d'un rectangle és $26cm$. Si la base mesura $3cm$ més que l'altura, quines són les dimensions del rectangle?

(**114**) Hem de repartir 152 adhesius entre tres nens, de manera que el segon en tingui 8 més que el primer i que el tercer en tingui 16 més que el segon. Com ho farem?

(**115**) Per comprar 7 discos compactes em falten 12€, però si només compro 5, em sobren 18€. Si tots els compactes valen igual, quant en val un?

(**116**) Descompon 60 en dues parts de tal manera que el triple de la primera més el doble de la segona sumi 152.

(**117**) Troba tres nombres consecutius tals que restant el doble del més gran al triple de la suma dels dos més petits s'obtingui el nombre 527.

(**118**) Una prova consta de 20 qüestions. Per cada qüestió contestada correctament, un alumne guanya 3 punts; però per cada qüestió contestada malament o no contestada, en perd 2. Si al final de la prova un alumne va aconseguir 30 punts, quantes qüestions va contestar correctament?

(**119**) Tinc 12 monedes, unes de 5€ i altres de 2€. Quantes monedes tinc de cada si sumen un total de 51€?

(**120**) Un dromedari té un gep, i un camell en té dos. En un ramat de camells i dromedaris hem comptat 86 caps i 148 geps. Quants camells hi ha? I quants dromedaris?

(**121**) Dos nombres sumen 70. Si dividim el més gran entre 10 i el més petit entre 3 i sumem els resultats, dóna 14. Esbrina quins són aquests nombres.

(**122**) Reparteix 600€ entre dues persones de manera que a una hi correspongui els $\frac{2}{3}$ del que li correspon a l'altra.

(**123**) Les edats de quatre amics sumen 138. Troba l'edat de cada un d'ells sabent que cada un es porta 3 anys de diferència amb el següent.

(**124**) Dos germans es porten una diferència de 3 anys, i dintre de 4 anys les seves edats sumades faran 33. Calcula-les.

(**125**) El triple de l'edat que tenia en Jordi fa 4 anys és el doble de la que tindrà d'aquí a 8 anys. Quina és l'edat actual d'en Jordi?

(**126**) Una mare té 49 anys i la seva filla, 26. Quants anys fa que l'edat de la mare era el doble que la de la filla?

(**127**) L'edat de la Cristina és el triple de la d'en Jordi, i d'aquí a 20 anys serà el doble. Calcula les edats actuals de les dues persones.

(**128**) La diferència entre les edats d'un pare i la seva filla és 25 anys. Fa 15 anys l'edat de la filla era el doble de l'edat del pare. Quina és l'edat actual del pare i la filla?

(**129**) Fa 10 anys l'edat de la Montse era la meitat de l'edat que tindrà daquí a 20 anys. Quina és l'edat actual de la Montse?

(**130**) L'edat d'un pare és el triple de la del seu fill i junts sumen 44 anys. Quina és l'edat de cada un?

(**131**) Entre dos amics tenen 87 cromos. Si un en té el doble que l'altre, quants cromos tenen cada un?

(**132**) En una competició d'atletisme hi ha el doble d'atletes dels EUA que d'Alemanya. Si en total hi ha 213 atletes, quants participants hi ha de cada un d'aquests dos països?

PROBLEMA RESOLT 6

Resoldrem la següent equació amb denominadors:

$$\frac{3x}{4} - 12 = 7 - \frac{x}{5}$$

Per fer-ho, primer haurem de calcular el mcm(4,5), el qual és 20. I multiplicarem tots els termes pel mcm, en aquest cas per 20:

$$\begin{aligned}
\frac{20 \cdot 3x}{4} - 20 \cdot 12 &= 20 \cdot 7 - \frac{20 \cdot x}{5} \\
5 \cdot 3x - 240 &= 140 - 4 \cdot x \\
15x - 240 &= 140 - 4x \\
15x + 4x &= 140 + 240 \\
19x &= 380 \\
x &= \frac{380}{19} \\
x &= 20
\end{aligned}$$

(**133**) $\frac{x}{2} = 5$

(**134**) $\frac{x}{3} = 4$

(**135**) $\frac{x}{3} = 5 - 2$

(**136**) $\frac{x}{4} = 8$

(**137**) $\frac{3x}{5} = 6$

(**138**) $\frac{x}{2} = 3 + 4$

(**139**) $\frac{x}{2} = 9$

(**140**) $\frac{x}{4} = 2$

(**141**) $\frac{x}{9} = 6$

(**142**) $\frac{2x}{4} = 6$

(**143**) $\frac{2x-5}{3} = 15$

(**144**) $\frac{3x+2}{4} = 5$

(**145**) $\frac{6+2x}{4} = 3$

(**146**) $\frac{3x+6}{3} = 5$

(**147**) $\frac{x}{2} = \frac{9}{6}$

(**148**) $\frac{2x}{3} = \frac{4}{9}$

(**149**) $\frac{3x}{4} = \frac{9}{6}$

(**150**) $\frac{2x-3}{5} - 7 = 0$

(**151**) $\frac{5x}{3} = \frac{60}{4}$

(**152**) $\frac{2-x}{2} = \frac{2x-3}{3}$

(**153**) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 20$

(**154**) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + \frac{11}{6}$

(**155**) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = 0$

(**156**) $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3}$

(**157**) $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+2}{5}$

(**158**) $\frac{x+11}{6} = \frac{x+5}{3}$

(**159**) $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-1}{6} = 4$

(**160**) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

(**161**) $\frac{x-2}{4} + \frac{3x-1}{8} = 4$

(162) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{6}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5x}{12}$

(163) $\dfrac{4}{5}-2x+\dfrac{3x}{2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{7x}{10}$

(164) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{x-2}{10}=\dfrac{3-2x}{15}-\dfrac{1}{6}+x$

(165) $\dfrac{7x+8}{8}-\dfrac{9x-12}{16}=1$

(166) $\dfrac{4+x}{21}-\dfrac{5+3x}{14}=\dfrac{x+5}{6}-1$

(167) $\dfrac{1-2x}{2}+\dfrac{4-4x}{10}=\dfrac{2x-13}{10}-\dfrac{4x-3}{5}$

(168) $\dfrac{x-2}{5}-\dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{2x+6}{15}=0$

(169) $4x-\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{5(x+1)}{3}=\dfrac{3(x-2)}{2}-\dfrac{4(x+1)}{3}$

(170) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{x+1}{5}+\dfrac{2}{5}$

(171) $\dfrac{4x+3}{5}-\left(x-\dfrac{2x-2}{6}\right)=4$

(172) $1-\dfrac{2x-5}{40}=x-\dfrac{4x-7}{10}+\dfrac{x}{5}$

(173) $7x-6=22$

(174) $-2x+10=20$

(175) $10+2x=-7x+19$

(176) $13x-21=12x-24$

(177) $2(3x+1)=7x-3$

(178) $120=2x-(15-7x)$

(179) $9(13-x)-4x=5(21-2x)+9x$

(180) $5x=8(5x-3)-4$

(181) $3(x-7)-6(3-2x)=19-4(2x+3)$

(182) $\dfrac{5x}{6}+\dfrac{2x}{3}=9$

(183) $\dfrac{3x}{5}+7=\dfrac{x}{3}+9$

(184) $4-\dfrac{x+3}{6}=2+\dfrac{9-2x}{3}$

(185) $\dfrac{x+11}{2}+\dfrac{2x-7}{5}=-4$

(186) $\dfrac{3x+5}{2}+\dfrac{4x-5}{5}=\dfrac{7x+1}{6}+7$

(187) En arribar 32 persones a una assemblea s'observa que ara el nombre d'assistents és igual al triple dels que hi havia menys 14. Quantes persones hi havia inicialment a l'assemblea?

(188) En una granja que fa agricultura ecològica, hi ha gallines i gats. Si tenim en total 38 caps i 108 potes, quants animals hi ha de cada classe?

(189) Tenim 30 xiclets. N'hi ha de maduixa i de menta. Quants de cada n'hem comprat si ens hem gastat 5€ i 40c i cada un de menta val 20c i el de maduixa 15c?

MISCEL·LÀNIA

(Per Pere Busquets)

(190) La història ha conservat pocs trets biogràfics de Diofant (325-410), notable matemàtic de l'antiguitat. Tot el que es coneix sobre ell ha estat pres de la dedicatòria que hi ha en el seu sepulcre, inscripció composta en forma d'exercici matemàtic. Reproduim la seva inscripcio:

Caminant!, Aquí han estat sepulcrades les restes de Diofant. I els seus números poden mostrar, Oh! Miracle!, la longevitat de la seva vida, la sexta part de la qual va constituir la seva formosa infància. Havia transcorregut més d'una dotzena part de la seva vida, quan borrissol va cobrir la seva barba. I la sèptima part de la seva existència va transcórrer en un matrimoni estèril. Va passar un lustre més i el va fer feliç el naixement del seu preciós primogeni, que va entregar la seva bella existència de la terra, que va durar tan sols la meitat de la del seu pare. I amb gran pena va descendir a la sepultura, havent sobreviscut quatre anys a la mor del seu fill.

Digues quants anys va viure Diofant i quan li va arribar la mort.

(191) $\dfrac{3(x-1)}{4}=2+\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{2}$

(192) $\dfrac{4(3x+6)}{5}+12=\dfrac{3(2x+6)}{2}+2x$

(193) $\dfrac{2x+1}{3}=\dfrac{x-1}{5}$

(194) $\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{5}{x-4}$

(195) $2\left(2x-2\left(3x-2\right)\right)=3x-3$

(196) $\dfrac{x+3}{10} - \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{x-21}{4} + \dfrac{4-x}{7}$

(197) $1 - \dfrac{2(x-1)}{3} - 5x = 3(1+2x) - 13$

(198) $\dfrac{7+\frac{x}{2}}{3} + \dfrac{\frac{x}{5}+6}{4} = 6$

(199) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x}$

(200) $\dfrac{x-3}{2} + \dfrac{x+4}{3} = 1$

(201) $\dfrac{2x+3}{5} - \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x+3}{4}$

(202) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x+3(x-2)}{5} = \dfrac{x-2(3-x)}{5}$

(203) $5 - (2 - 3(x-3) + 4x) - 3x + 5 = 3$

(204) $3(x+2) - 4(x-3) = 2(3x-1) - 3(2x-4)$

(205) $\dfrac{9-x}{8} + \dfrac{5x+1}{6} = \dfrac{3x+7}{10} - \dfrac{1-6x}{5}$

(206) $\dfrac{\dfrac{3x+1}{7} - 4}{3} + \dfrac{\dfrac{2-3x}{4} + 3}{2} = \dfrac{\dfrac{5x-1}{3} + 2}{5} - 1$

(207) $3(x+1) - 6(2x-4) = 7(1+x) - 2(3x-5)$

(208) $5 - 4\left(3(x+2) - 5(2x+1)\right) + 3 = x + 31$

(209) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{x-3}{2}+1}{2} + 3}{4} + x = 6$

(210) $3x - \left(\dfrac{1}{2} - \left(x - \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{x-2}{2}\right)\right) - \dfrac{x-1}{3}\right) = 1 - \dfrac{x}{4}$

(211) $\dfrac{\dfrac{3x-(2x-6)+5}{3} - \dfrac{-4-\dfrac{x+3}{7}}{5}}{6} - (x-7) = \dfrac{2\left(\dfrac{4x-1}{3}+2\right)}{7} - \dfrac{\dfrac{5-\left(\dfrac{x}{2}+1\right)}{2} - 7}{3}$

C.2 Solucions de les equacions de primer grau

(1) $11m$

(2) $x = 37$ i $x = 73$

(3)
(a) $x = 10$
(b) $x = 72$
(c) $x = 7$
(d) $x = 73$
(e) $x = 60$

(4)
(a) $x = 5$
(b) $x = 54$
(c) $x = 21$
(d) $x = 9$
(e) $x = 23$

(5)
(a) $x = -2$
(b) $x = 26$
(c) $x = 2$
(d) $x = 26$
(e) $x = 4$

(6) $x = 6$

(7) $x = -3$

(8) $x = \frac{2}{3}$

(9) $x = \frac{-2}{3}$

(10) $x = \frac{3}{2}$

(11) $x = \frac{-5}{3}$

(12) $x = -3$

(13) $x = \frac{5}{3}$

(14) $x = \frac{3}{5}$

(15) $x = \frac{-64}{9}$

(16) $x = \frac{15}{7}$

(17) $x = 8$

(18) $x = 9$

(19) $x = 5$

(20) $x = -4$

(21) $x = -4$

(22)
(a) $x = 7$
(b) $x = 25$
(c) $x = 26$
(d) $x = 52$
(e) $x = 12$

(23)
(a) $x = 3$
(b) $x = 30$
(c) $x = 3$
(d) $x = 1$
(e) $x = 55$

(24)
(a) $x = 12$
(b) $x = -9$
(c) $x = -1$
(d) $x = 1$
(e) $x = 23$

(25)
(a) $x = 1$
(b) $x = 7$
(c) $x = \frac{1}{6}$
(d) $x = \frac{9}{5}$
(e) $x = 5$

(26) $x = 35$

(27) 62€

(28) $x = 12$

(29)
(a) $x = 1$
(b) $x = -6$
(c) $x = 28$
(d) $x = 32$
(e) $x = 5$

(30) $x = 26$

(31) $x = 44$

(32) $x = 54$

(33) $27m$

(34) $x = 8$

(35) $x = 3$

(36) $x = 16$

(37) $x = 2$

(38) $x = 3$

(39) $x = 10$

(40) $x = 3$

(41) $x = \frac{3}{2}$

(42) $x = 4$

(43) $x = 7$

(44) $x = 2$

(45) $x = \frac{1}{7}$

(46) $x = 3$

(47) $x = 64$

(48) $x = 5$

(49) $x = -44$

(50) $x = 3$

(51) $x = 17$

(52) $x = 1$

(53) $x = -14$

(54) $x = \frac{-1}{3}$

(55) $x = \frac{1}{2}$

(56) $x = 6$

(57) $x = \frac{28}{3}$

(58) $x = 2$

(59) $x = \frac{-1}{2}$

(60) $x = 5$

(61) $x = 2$

(62) 50€

(63) $x = 33$

(64) $x = 45$

(65) $x = 4$

(66) $x = 25$

(67) 18 conills

(68) $x = 8$

(69) $x = 118$

(70) $x = 12$

(71) $x = 24$

(72) $x = 4$

(73) $x = 9$

(74) $37cm$

(75) $40cm$ i $10cm$

(76) $x = 2$

(77) $x = 450$

(78) $x = 5$

(79) $x = 21$

(80) $x = 5$

(81) $x = 28$

(82) $x = 6$

(83) $x = 1$

(84) $x = 2$

(85) $x = 5$

(86) $x = 0$

(87) $x = \frac{23}{3}$

(88) $x = 2$

(89) $x = \frac{-5}{3}$

(90) $x = \frac{9}{5}$

(91) $x = \frac{8}{3}$

(92) $x = 3$

(93) $x = -2$

(94) $x = 1$

(95) $x = 3$

(96) $x = 2$

(97) $x = 7$

(98) $x = 3$

(99) $x = 7$

(100) $x = 1$

(101) $x = 2$

(102) 680€

(103) $x = 54$

(104) 18 anys

(105) $x = 56$

(106) $x = 54$

(107)
(a) $x = -3$
(b) $x = 2$
(c) $x = 1$
(d) $x = -6$
(e) $x = 1$

(108)
(a) $x = 4$
(b) $x = 252$

(109) $x = 3$

(110) 35 nois i 48 noies

(111) 36 nois i 41 noies

(112) 13cm i 26cm

(113) 8cm i 5cm

(114) 40, 48 i 64 adhesius

(115) 15€

(116) 32 i 28

(117) 132, 133 i 134

(118) 14 qüestions

(119) 9 de 5€ i 3 de 2€

(120) 24 dromedaris i 62 camells

(121) 40 i 30

(122) 360€ i 240€

(123) 30, 33, 36 i 39 anys

(124) 11 i 14 anys

(125) 28 anys

(126) Fa 3 anys

(127) La Cristina 60 anys i en Jordi 20 anys

(128) 65 i 40 anys

(129) 40 anys

(130) 11 i 33 anys

(131) 29 i 58 cromos

(132) 142 d'Estats Units i 71 Alemanys

(133) $x = 10$

(134) $x = 12$

(135) $x = 9$

(136) $x = 32$

(137) $x = 10$

(138) $x = 14$

(139) $x = 18$

(140) $x = 8$

(141) $x = 54$

(142) $x = 12$

(143) $x = 25$

(144) $x = 6$

(145) $x = 3$

(146) $x = 3$

(147) $x = 3$

(148) $x = \frac{2}{3}$

(149) $x = 2$

(150) $x = 19$

(151) $x = 9$

(152) $x = \frac{12}{7}$

(153) $x = 42$

(154) $x = 55$

(155) $x = 11$

(156) $x = 9$

(157) $x = \frac{-11}{2}$

(158) $x = 1$

(159) $x = \frac{34}{5}$

(160) $x = 5$

(161) $x = \frac{37}{5}$

(162) $x = \frac{-15}{11}$

(163) $x = \frac{-1}{4}$

(164) $x = \frac{15}{29}$

(165) $x = \frac{-12}{5}$

(166) $x = 0$

(167) $x = 2$

(168) $x = -1$

(169) $x = -1$

(170) $x = 2$

(171) $x = 28$

(172) $x = \frac{1}{2}$

(173) $x = 4$

(174) $x = -5$

(175) $x = 1$

(176) $x = -3$

(177) $x = 5$

(178) $x = 15$

(179) $x = 1$

(180) $x = \frac{4}{5}$

(181) $x = 2$

(182) $x = 6$

(183) $x = \frac{15}{2}$

(184) $x = 3$

(185) $x = -9$

(186) $x = 5$

(187) 23 persones

(188) 22 gallines i 16 gats

(189) 12 de maduixa i 18 de menta

(190) Diofant va viure 84 anys, es va casar als 21 anys, va ser pare als 38 anys i va perdre al seu fill als 80.

(191) $x = \frac{63}{5}$

(192) $x = 3$

(193) $x = \frac{-8}{7}$

(194) $x = -16$

(195) $x = 1$

(196) $x = 25$

(197) $x = 1$

(198) $x = 10$

(199) $x = 2$

(200) $x = \frac{7}{5}$

(201) $x = 1$

(202) $x = 0$

(203) $x = -1$

(204) $x = 8$

(205) $x = 1$

(206) $x = 2$

(207) $x = 1$

(208) $x = 1$

(209) $x = 5$

(210) $x = \frac{10}{19}$

(211) $x = 4$

Apèndix D

Activitats

D.1 Quants cigrons hi ha en un quilo de cigrons

Material: Un quilogram de cigrons, un recipient per posar-los i retoladors.
Introducció: La tècnica que presentarem en aquesta activitat s'anomena de captura i recaptura i és utilitzada pel recompte estimatiu de poblacions d'animals que viuen en llibertat: per exemple les balenes del mar del Nord, els esquirols d'un bosc o els peixos de l'estany de Banyoles. En el nostre cas comptarem aproximadament el nombre de cigrons que hi ha en un quilogram de cigrons i, en lloc de marcar els individus (cigrons!) amb pintures especials o microxips, els pintarem amb un retolador.
Objectiu: Conèixer una tècnica sorprenent per estimar el nombre d'individus d'una població, simulant-ho amb cigrons.
Desenvolupament: El professor ha portat una bossa de cigrons que pesa un quilogram (podem comprovar-ho!) i, d'entrada, els abocarem dins d'un recipient. Ens proposem comptar-los!

(**1**) Prenem una primera mostra de cigrons i, tot el grup conjuntament, la comptem. Sigui m el nombre de cigrons que hem comptat.

(**2**) Novament, tot el grup conjuntament, prenem retoladors i fem una marca ben visible sobre cada cigró de la mostra.

(**3**) Retornem la mostra "pintada"al recipient amb la resta dels cigrons i remenem per tal que quedin ben barrejats.

(**4**) Ara ens posem a treballar en equips de tres persones. Amb els altres membres del teu equip preneu una segona mostra de cigrons (entre 150 i 200) i compteu-la. Sigui m la quantitat exacta de cigrons d'aquesta nova mostra.

(**5**) Compteu ara quants dels cigrons d'aquesta segona mostra porten el senyal de retolador. Tingueu cura en mirar-ho bé. Anomenem n al nombre obtingut en aquest recompte.

(**6**) Si anomenem t al total de cigrons que estem buscant sembla assenyat esperar que la proporció de cigrons marcats (n) que apareix en la segona mostra (m) sigui aproximadament la mateixa proporció de cigrons marcats (m) respecte del total de cigrons (t). Així tindrem que $\frac{n}{m} \approx \frac{m}{t}$. Plantegeu-ho amb les quantitats concretes que heu obtingut. Naturalment desconeixem el valor de t.

(**7**) Ara aïlleu t en l'anterior relació de proporcionalitat. Aquest és el valor de l'estimació que estem buscant. Compareu-lo amb els valors que han obtingut els altres equips. Qui s'hi deu haver apropat més?

(**8**) Per a poder respondre a la pregunta anterior el millor serà comptar, entre tots, quants cigrons hi ha realment en total. És una feina una mica feixuga però, si ens hi posem tot el grup, no ens costarà gaire! Quants cigrons obtenim?

(**9**) Ara que ja coneixeu el resultat exacte calculeu l'error absolut i l'error relatiu que heu comès en la vostra estimació.

(**10**) Compareu els errors absolut i relatiu observats en els diversos grups. Creieu que seria sensat pensar que tenen alguna cosa a veure amb la grandària de la mostra que ha pres cada grup en el punt 4 d'aquest guió?

D.2 Introducció als nombres racionals

Materials: Tires de cartolina de vuit colors diferents i d'igual longitud, regle, retolador i tisores.
Introducció: Una fracció serveix per expressar parts de la unitat. Usem fraccions quan diem "mig quilo de pa", "un quart de litre d'oli"o "un cèntim d'euro".

Tot seguit us proposem unes activitats per tal de descobrir aquests objectes matemàtics que, com veureu més endavant, ja els egipcis feien servir.
Objectiu: Presentar el concepte de fracció i les seves primeres propietats.
Desenvolupament: En principi treballareu individualment. Haureu d'emplenar aquest guió i, a la propera classe, lliurar-lo al professor. Poseu atenció a l'ordre, la presentació, la claredat i correcció en l'expressió.

(**1**) Tenint en compte les equivalències entre lletres i colors que teniu a la pissarra feu el següent:

- Preneu la tira de cartolina A com a unitat i escriviu-hi un 1 en el centre.
- Preneu la tira B, dividiu-la en dues parts iguals i en cadascuna escriviu-hi $\frac{1}{2}$.
- Preneu la tira C, dividiu-la en tres parts iguals i escriviu-hi $\frac{1}{3}$.
- Preneu la tira D, dividiu-la en quatre parts iguals i escriviu-hi $\frac{1}{4}$.
- Preneu la tira E, dividiu-la en cinc parts iguals i escriviu-hi $\frac{1}{5}$.

(**2**) Cada peça de $\frac{1}{2}$ l'anomenarem "meitat". Quin nom donarem a les altres peces? Empleneu el quadre següent.

Peça	Nom
$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{5}$	

Peça	Nom
$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	
$\frac{1}{8}$	

Quin número és el responsable de donar nom a les peces?

Donar nom és el mateix que **denominar**, per això aquest número s'anomena **denominador** de la fracció.

(**3**) Ara agruparem algunes de les peces que hem obtingut:

- Preneu 2 peces de $\frac{1}{3}$ i poseu-les juntes. Quina fracció de la unitat tindrem? Dels dos termes de la fracció quin indica el número de peces que hem pres?
- Preneu 4 peces de $\frac{1}{5}$ i poseu-les juntes. Quina fracció de la unitat tindrem? Dels dos termes de la fracció quin indica el número de peces que hem pres?
- Preneu 3 peces de $\frac{1}{4}$ i poseu-les juntes. Quina fracció de la unitat tindrem? Dels dos termes de la fracció quin indica el número de peces que hem pres?
- En cada cas quin és el terme de la fracció que indica el número de peces que hem pres?

A aquest terme, és clar, l'anomenarem **numerador**.

(**4**) Ara estudiarem l'ordre! Preneu una peça de cada color i col·loqueu-les, per ordre de longituds, sobre la taula. Reflexioneu sobre el que observeu. Podeu formular una regla general? Expliqueu-ho!

Ajuntant peces construïu successivament i observeu l'ordre de les fraccions $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$. Podeu formular una regla general? Expliqueu-la!

D.3 Introducció a les Equacions

Materials: Necessitem tallar fulls de paper en 16 trossos. Escrivim diferents termes d'una equació de primer grau: $2x,\ -3,\ -4x,\ 6,\ 7x$, ...
Continguts: Resolució d'equacions de primer grau.
Desenvolupament: Obrim espai a l'aula, enretirem taules i cadires a un racó de l'aula per aconseguir el màxim d'espai buit. Repartim un paperet a cada alumnes. Podem fer diferents activitats:

(**1**) Ajuntem a tothom que tingui coeficients positius i negatius.

(**2**) Ens ajuntem per termes que tenen x i termes independents.

(**3**) Fem dos grups i creem una línia imaginària que separi als dos grups. Els hi demanem que sumin tots els termes, quan es pugui, dins del mateix grup. Després imaginem que la línia que separa als grups és un =, igual, i resolem l'equació, és a dir, el resultat d'un grup igual al resultat de l'altre grup.

Observacions: Intentarem anar creant diferents grups i variant

D.4 Gràfics de funcions al terra

Materials: Necessitem estar en un pati o en una sala enrajolada de manera que les ratlles de les rajoles formin una quadrícula. Necessitarem també guixos. Cada alumne/a disposarà de paper, llapis.
Continguts: Gràfic d'una funció.
Desenvolupament: Anem al pati o a una sala amb rajoles que formin una quadrícula on sigui possible embrutar una mica el terra. Fixem un origen i resseguim amb guix dues juntures ortogonals de rajoles que seran els eixos de coordenades. Prenent com a unitat la longitud del costat d'una rajola assenyalem els valors sobre cada eix, per exemple, a l'eix d'abscisses, des de -6 a 6. L'escala de l'eix d'ordenades pot dependre de les funcions que decidim representar. Cada alumne/a es farà càrrec d'un valor sobre l'eix d'abscisses (podem prendre també mitges unitats: -6, -5.5, -5, -4.5, ... Llavors el professorat indicarà l'expressió analítica d'una funció i cada alumne/a calcularà la imatge de la seva abscissa. Després prendrà un tros de guix i l'anirà a dibuixar sobre el terra al lloc que correspongui. Així, en pocs instants, quedarà molt perfilada la representació gràfica de la funció donada.

Poden usar-se funcions diverses segons el nivell i podrem formular preguntes, per exemple:

(**1**) $f(x) = 2x - 1$ En quina abscissa talla l'eix?

(**2**) $f(x) = -3x + 2$ Per a quins punts és positiva? I negativa?

(**3**) $f(x) = x + 2$, $f(x) = x + 4$, $f(x) = x$ i $f(x) = x - 3$ Són paral·leles?

Observacions: Cada alumne/a "es fa càrrec"d'un número i es fa seva la idea d'abscissa, d'ordenada i d'imatge. El gràfic sorgeix de les imatges de tots/es, com d'una feina comú. Cal que el final tothom tingui cura de netejar el terra.

D.5 Introducció als Polinomis

Materials: Necessitem tallar fulls de paper en 16 trossos. Escrivim diferents monomis variant els coeficients i el grau: $x^3,\ 2x^2,\ -x,\ 9,\ -3x^3,\ 8x^4$,...
Continguts: Suma, resta i ordenació de monomis.
Desenvolupament: Obrim espai a l'aula, enretirem taules i cadires a un racó de l'aula per aconseguir el màxim d'espai buit. Repartim un paperet a cada alumnes. Podem fer diferents activitats:

(**1**) Ajuntem a tothom que tingui coeficients positius i negatius.

(**2**) Ens ajuntem per graus.

(**3**) Fem que es col·loquin els alumnes per ordre de grau.

(**4**) Fem dos o tres grups i creem polinomis ajuntant monomis del mateix grau. Després sumem els polinomis. També els podem restar. Finalment, podem crear polinomis nous multiplicant-los per números, $2P(x) - 3Q(x)$, ...

Observacions: Intentarem anar creant diferents grups i variant les operacions en funció de com es vagi desenvolupant l'activitat.

D.6 El Decímetre Cúbic i el Litre

Materials: Tres llaunes de begudes utilitzades. Un decímetre cúbic de plàstic que es pugui emplenar. Reglets d'un centímetre cúbic. Regle, cartró, estisores, cola, cinta adhesiva.
Introducció: Haureu observat que en les llaunes de begudes hi apareix, entre altres dades, la quantitat de líquid que contenen. Solen escriure-la de dues maneres: $330ml$ o $33cl$. És així que tres d'aquestes llaunes són quasi un litre de líquid (hi falten tan sols $10ml$!). De fet el litre no és estrictament una unitat del Sistema Internacional i es defineix com la capacitat d'un decímetre cúbic. Avui ho comprovarem!
Objectiu: Comprovar que un litre d'aigua ocupa un decímetre cúbic de volum.
Desenvolupament:

(**1**) Volem construir una caixa cúbica, oberta per dalt, que tingui un decímetre cúbic de volum. Quant haurà de mesurar l'aresta? Sobre el cartró dissenyeu una plantilla per construir aquesta caixa.

(**2**) Retalleu la plantilla i munteu la caixa procurant que quedi tan sòlida com sigui possible.

(**3**) Creieu que, en aquest decímetre cúbic, realment hi cap un litre d'aigua? Com ho veieu?

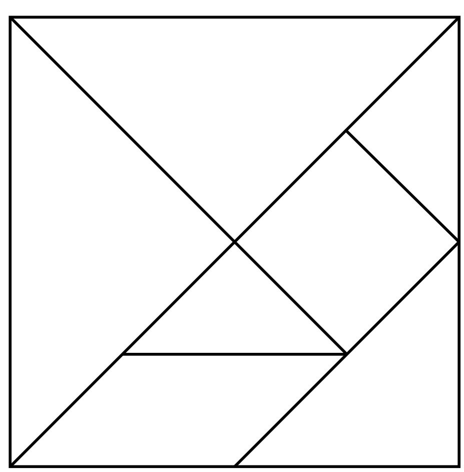
(**4**) Ara la vostra professora o el vostre professor us mostrarà un decímetre cúbic de plàstic. Mesureu-lo per comprovar-ho i compareu-lo amb la caixa que heu construït.

(**5**) Ara mirem-nos les llaunes! Llegiu atentament les etiquetes (les etiquetes sempre s'han de llegir atentament!) i esbrineu la quantitat de líquid que conté cada llauna. Quina quantitat total de líquid hi ha entre les tres llaunes? Observareu que quasi és un litre. Quan li falta? Podríeu respondre a aquesta darrera pregunta emprant com a unitat el centímetre cúbic?

D.7 El Tangram Xinès

Conegut joc xinès amb el qual es poden fer moltes figures combinant set peces formades retallant un quadrat.
Material: Tisores i fulls quadriculats.
Continguts: Construcció i mesura de figures planes. Càlcul de perímetres, àrees i angles. Percepció geomètrica amb el recobriment de figures amb peces.
Desenvolupament:

(**1**) Construcció del propi material. Agafem fulls quadriculats (per exemple els d'exàmens) i els hi fem dibuixar un quadrat tant gran com sigui possible. Després els hi dibuixem el model del quadrat per obtenir les peces del tangram i que els alumnes retallin les seves pròpies peces.



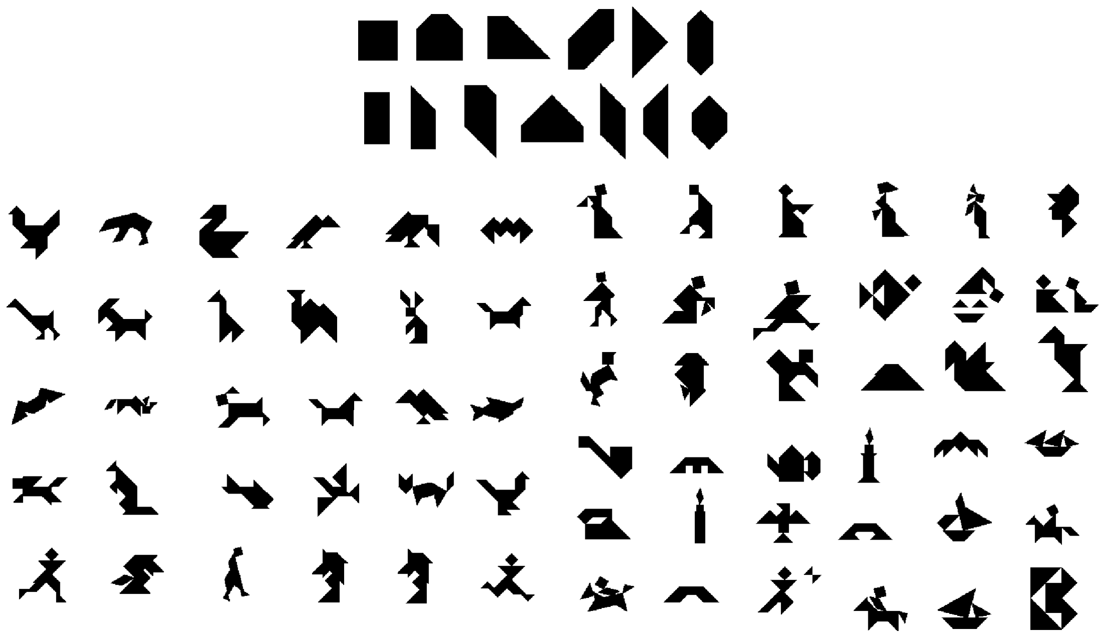
(**2**) Càlcul de perímetres, àrees i angles de les diferents peces del tangram. En el cas del tangram xinès podem prendre com a unitats de longitud i de superfície respectivament el costat i l'àrea de la peça quadrada.

(**3**) Identificar peces semblants i deduir la raó de semblança.

(**4**) Ordenar peces segons el seus perímetres o les seves àrees.

(**5**) Mesurant algunes de les peces pot comprovar-se el teorema de Pitàgores.

(**6**) Composar figures donades usant totes les peces:



(**7**) Classificar les figures obtingudes com a polígons: per nombre de costats, regulars, irregulars, còncaus, convexos...

(**8**) Mesurar les àrees de les figures obtingudes, els seus angles interiors i els seus perímetres. Poden fer-se estimacions prèvies que sempre comprometen més l'interès de l'alumnat.

D.8 Problemes d'enginy

(**1**) Un pastor ha de creuar un riu amb un llop, una cabra i una caixa d'enciams. Ho ha de fer amb una barca on només hi cap ell i una de les tres coses. Si el llop queda sol amb la cabra se la menjarà i, si la cabra es queda sola amb la caixa d'enciams se'ls menjarà. Com pot creuar el riu el pastor amb totes tres coses?

(**2**) Estàs tancat en una cela amb dues portes: una et porta a la salvació i l'altra et porta directa a la mort. A cada porta hi ha un vigilant. Saps que un dels vigilants sempre diu la veritat i que l'altre sempre menteix. Per escollir la porta per on passaràs, només pots fer una pregunta a un dels dos vigilants. Com ho faràs?

(**3**) Hi ha dotze monedes aparentment iguals, però una d'elles té un pes lleugerament diferent. No se sap si aquesta moneda pesa més o menys que les altres. Utilitzant una balança de dos plats, i només podent fer tres pesades, com trobaries la moneda que és diferent? I la moneda pesa més o menys que les altres?

(**4**) Un entrevistador es dirigeix a una casa on l'atén una dona.
- Quants fills tens?
- Tres - diu ella.
- Edats?
- El producte de les edats és 36, i la suma és igual al número de la casa veïna - diu ella.
L'entrevistador se'n va, però al cap d'una estona torna i li diu a la dona que les dades que li ha donat no són suficients. La dona pensa i li diu:
- Tens raó, la més gran estudia piano.
Amb això n'hi ha prou perquè l'entrevistador sàpiga l'edat dels fills de la dona. Quines sóna aquestes edats?

(5) Un ós camina 10 kilòmetres cap al sud, 10 cap a l'est i 10 cap al nord, tornant així al punt de sortida. De quin color és l'ós?

(6) En un taulell de 3x3 col·loca els números de l'1 al 9 de forma que cada fila, columna i diagonal sumi 15.

(7) Tres amics van a menjar a un restaurant, Mengen el mateix i el compte és de 25 euros. Cada un paga amb un bitllet de 10 euros. El cambrer porta els 5 euros de canvi, cada un pren un euro i li deixen dos euros de propina. Més tard fan comptes i diuen: cada un ha pagat 9 euros, per tant, hem gastat $9 \times 3 = 27$euros, més els 2 euros de propina fan 29 euros. On està l'euro que falta?

(8) Col·loca 8 dames en un taulell d'escacs de forma que no n'hi hagi cap que es matin entre elles.

(9) Dos trens estan en una mateixa via separats $100Km$. Comencem a moure's en sentits oposats, una cap a l'altre, a $50\frac{Km}{h}$; en aquest mateix moment, una supermosca surt de la màquina d'un dels trens i vola a $100\frac{Km}{h}$ cap a la màquina de l'altre tren. Just quan arriba, fa mitja volta i torna a la primera màquina de tren, i d'aquesta manera va i ve d'una màquina de tren a l'altra fins que les dues màquines de tren xoquen i mor la mosca a l'accident. Quina distància ha recorregut la supermosca?

(10) Col·loquem 3 files de 3 punts cada una. Dibuixa quatre línies sense aixecar el llapis del paper de manera que passis per tots els punts sense passar més de dues vegades pel mateix punt.

(11) Tenim tres cases i tres punts de distribució, un de gas, un de llum i un d'aigua. Dibuixa totes les connexions entre les fonts d'energia i les cases de manera que no n'hi hagi cap que es creu-hi.

(12) Col·loca deu arbres de manera que tinguem 5 fileres de 4 arbres.

(13) Tenim tres caixes plenes de caramels. N'hi ha de Menta i d'Anís. El problema és que tenim tres caixes i totes estant mal etiquetades. En una posa que són caramels d'Anís, en una altra de Menta i a la última posa que són Barreja. Si només podem treure un caramel d'una caixa, com podem saber com posar les etiquetes bé?

(14) Hi ha una habitació amb una sola bombeta. A fora de l'habitació hi ha tres interruptors, i des d'on hi ha els interruptors no es pot veure si la bombeta està encesa o apagada. Com podem saber a quin interruptor es correspon la bombeta si només podem tocar un cop els interruptors per entrar dins de l'habitació?

(15) Tenim dos rellotges de sorra de 4 minuts i 7 minuts. Necessitem mesurar exactament 9 minuts. Com ho faràs?