
Matemàtiques
1^{er} Batxillerat Social



IES MIQUEL BIADA
DEPARTAMENT DE CIÈNCIES

Es permet la copia, distribució i modificació,
ja sigui de un o més capítols d'aquesta obra
o del conjunt de l'obra, en qualsevol format,
mecànic o digital, sempre i quan es mantingui
l'autoria i aquesta nota.

Segons la llicència de documentació lliure
[http://creativecommons.org/licenses/by-
sa/3.0/deed.ca](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.ca)

Índex

1	Nombres Reals $\mathbb{R}$	7
1.1	Nombres que no són Racionals	7
1.1.1	Relació entre la longitud amb un diàmetre de la circumferència	7
1.1.2	Relació entre la longitud del costat i la diagonal d'un quadrat	7
1.1.3	Relació entre les longituds dels costats d'un rectangle auri	8
1.2	Nombres Irracionals	8
1.2.1	L'arrel quadrada de 2: $\sqrt{2}$	9
1.2.2	El nombre pi π	9
1.2.3	El nombre e	9
1.3	Representació gràfica de nombres irracionals	10
1.4	Els nombres Reals: $\mathbb{R}$	12
1.5	Operacions amb nombres reals i propietats	13
1.5.1	Propietats	13
1.6	Les arrels i les potències	15
1.7	Propietats de les arrels	16
1.7.1	Propietat fonamental	17
1.7.2	Arrel d'una multiplicació	17
1.7.3	Arrel d'una divisió	17
1.7.4	Potència d'una arrel	17
1.7.5	Arrel d'una arrel	17
1.8	Operacions amb arrels	18
1.8.1	Sumes i restes	18
1.8.2	Multiplicacions i divisions	19
1.9	Racionalització de denominadors	19
1.10	Les solucions d'inequacions i la recta real	20
1.11	Notació científica	22
2	Equacions	25
2.1	Equacions de primer grau	25
2.2	Sistemes d'equacions de 1 ^a grau	33
2.3	Equacions de 2 ⁿ grau	33
2.4	Equacions amb x al denominador	34
2.5	Equacions Irracionals	34
2.6	Equacions Biquadrades	35
2.7	Sistemes d'Equacions de Segon Ordre	35
2.8	Sistemes de 3 Equacions amb 3 incògnites	35
2.9	Inequacions	36
2.10	Solucions	36
3	Combinatòria	41
3.1	Variacions	41
3.1.1	Variacions amb repetició	41
3.1.2	Variacions sense repetició	41
3.2	Permutacions	42
3.2.1	Permutacions amb Repetició	42
3.2.2	Permutacions Circulars	42
3.3	Combinacions	44

3.3.1	Combinacions amb repetició	44
3.4	Esquema	46
3.5	Solucions	46
4	Polinomis	49
4.1	Monomis	49
4.1.1	Suma de Monomis	49
4.1.2	Multiplicació de Monomis	50
4.2	Polinomis	50
4.2.1	Suma de Polinomis	50
4.2.2	Avaluació Numérica de Polinomis	51
4.2.3	Productes Notables	51
4.2.4	Multiplicació de polinomis	52
4.2.5	Divisió de polinomis	53
4.2.6	Mètode de Ruffini	54
4.3	Teorema del Residu	55
4.4	Arrels de Polinomis	55
4.5	Factorització de Polinomis	56
4.6	MCD i MCM de Polinomis	56
4.7	Fraccions algebraïques	57
4.8	Solucions	58
5	Funcions	61
5.1	Idea Intuïtiva de funció	61
5.2	Concepte de funció	62
5.3	Domini i recorregut d'una funció	63
5.4	Operacions amb funcions	64
5.4.1	Funció suma	64
5.4.2	Funció producte	64
5.4.3	Funció quocient	65
5.4.4	Funció composta	65
5.5	Funció inversa d'una funció	66
5.6	Característiques generals de la gràfica d'una funció	68
5.6.1	Continuïtat	68
5.6.2	Punts d'intersecció amb els eixos	69
5.6.3	Signe	71
5.6.4	Creixement i decreixement. Màxims i mínims	72
5.6.5	Periodicitat	72
5.7	Exercicis	73
6	Funcions II	79
6.1	Funció Lineal	79
6.2	Funció afí	82
6.3	Interpolació Lineal	83
6.4	Funcions Quadràtiques	85
6.4.1	Cas $b = c = 0$	86
6.4.2	Cas $b = 0$	86
6.4.3	Cas general: $b \neq 0$ i $c \neq 0$	87
6.5	Funcions de Proporcionalitat Inversa	89
6.6	Funcions definides a trossos	91
6.7	Funció Valor Absolut	91
6.8	Funció Part Entera	92
6.9	Exercicis	96

7	Funcions Exponencial i Logarítmica	101
7.1	Funcions Exponencials	101
7.1.1	La funció exponencial	101
7.1.2	Creixement exponencial	102
7.1.3	Aplicacions	103
7.2	Funció Logarítmica	106
7.2.1	Funció inversa de l'exponencial	106
7.2.2	La funció logarítmica	106
7.2.3	Logaritmes	107
7.2.4	Logaritmes decimals	108
7.3	Exercicis	109
8	Matemàtica Financera	113
8.1	Introducció	113
8.2	Interès Simple	113
8.3	El descompte comercial	115
8.4	Interès compost	116
8.5	Equivalències de taxes d'interès	118
8.5.1	Interès Simple	119
8.5.2	Interès Compost	119
8.6	Taxes d'interès anual amb períodes de capitalització inferiors a un any	120
8.7	Taxa nominal i taxa anual equivalent (TAE)	121
8.8	Concepte general d'anualitat	122
8.8.1	Anualitats de capitalització	122
8.8.2	Anualitats d'amortització	123
8.9	Solucions als Problemes	125
9	Progressions i Successions	129
9.1	Definició	129
9.2	Terme General d'una successió	130
9.3	Successions Monòtones	130
9.3.1	Fites	130
9.4	Progressions Aritmètiques	132
9.5	Progressions Geomètriques	133
9.5.1	Tipus de progressions geomètriques	134
9.5.2	Suma d' n termes d'una progressió geomètrica	134
9.5.3	Producte d' n termes d'una progressió geomètrica	135
9.6	Límits d'una successió	135
9.6.1	Successions Convergentes i Divergents	137
9.7	Operacions amb Successions	137
9.7.1	Successió Suma	137
9.7.2	Successió Producte	138
9.8	Límits de Successions Convergentes	138
9.8.1	Cas $b = 0$	138
9.9	Límits de Successions Divergents	139
9.10	Càlcul de Límits	140
9.10.1	Límits de polinomis	140
9.10.2	Límits d'indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$	140
9.10.3	Límits d'indeterminacions del tipus $\infty - \infty$	141
9.10.4	Límits de potències	141
9.11	El nombre e	142
9.12	Exercicis	143
9.13	Solucions	145

10 Límits i Continuitat de Funcions	147
10.1 Límit d'una funció en un punt	147
10.1.1 Límits d'operacions amb funcions	147
10.2 Límits d'una funció quan x tendeix a $+\infty$ 0 $-\infty$	148
10.3 Límits laterals d'una funció	149
10.4 Continuitat d'una funció en un punt	150
10.5 Tipus de Discontinuitats	152
10.6 Vídeos sobre continuïtat	157
10.7 Exercicis	158
10.8 Solucions	160

Capítol 1

Nombres Reals $\mathbb{R}$

1.1 Nombres que no són Racionals

Qualsevol nombre racional es pot expressar mitjançant un nombre decimal exacte o un nombre decimal periòdic.

Recíprocament, també es verifica que tot nombre decimal exacte o periòdic es pot expressar com un nombre racional.

Tot nombre racional s'expressa de manera única per un nombre decimal que és exacte o periòdic.

Ara bé, tot els nombres decimals han de ser necessàriament exactes o periòdics? Per molt que fraccionem la unitat, segur que podem trobar longituds la mesura de les quals no es podrà expressar mitjançant un nombre racional. Dit d'una altra manera, no tots els nombres decimals són exactes o periòdics i, en conseqüència, no tots els nombres decimals són racionals.

Tot seguit recordem alguns d'aquests nombres.

1.1.1 Relació entre la longitud amb un diàmetre de la circumferència

Sabem que $L = \pi \cdot d$. Per tant, podem escriure:

$$\frac{\text{Longitud de la circumferència}}{\text{Longitud del diàmetre}} = \frac{L}{d} = \pi$$

La longitud de qualsevol circumferència és igual a π multiplicat per la longitud d'un dels seus diàmetres.

Quin és el valor de π ? El que tu coneixes o el que pots obtenir de la calculadors no són més que aproximats al valor real de π .

1.1.2 Relació entre la longitud del costat i la diagonal d'un quadrat

Considerem un quadrat de costat c . Quan hi tracem una de les diagonals, el quadrat queda descompost en dos triangles rectangles iguals.

Apliquem el teorema de Pitàgores a un d'aquests triangles rectangles:

$$d^2 = c^2 + c^2 = 2c^2 \implies d = \sqrt{2c^2} = \sqrt{2}\sqrt{c^2} = \sqrt{2}c$$

Es comprova que:

$$\frac{\text{Longitud de la diagonal}}{\text{Longitud del costat}} = \frac{\sqrt{2}c}{c} = \sqrt{2}$$

És a dir, la longitud de la diagonal de qualsevol quadrat és igual a $\sqrt{2}$ multiplicada per la longitud del seu costat. Quin valor obtens a la calculadora per a $\sqrt{2}$? També en aquest cas es tracta d'un valor aproximat.

1.1.3 Relació entre les longituds dels costats d'un rectangle auri

Quina ha de ser la longitud expressada per x per tal que els dos rectangles siguin semblants? Els rectangles seran semblants si els costats corresponents són proporcionals. Per tant, s'ha de verificar:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \longrightarrow x^2 - x = 1 \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolem aquesta equació de segon grau:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \longrightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ i } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

En ser $x_2 < 0$ i tenint en compte que la longitud d'un segment sempre ha de ser positiva, la solució vàlida és x_1 . Per tant la resposta és

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

I fixa't que es verifica la igualtat següent:

$$\frac{\text{Longitud del costat gran}}{\text{Longitud del costat petit}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Els rectangles que compleixen aquesta condició s'anomenen rectangles auris i el quocient entre les longituds dels seus costats, relació àuria o nombre d'or. Habitualment, es representa mitjançant la lletra grega ϕ :

$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Les mesures que guardaven aquesta proporció van ser molt utilitzades en l'art clàssic, ja que es considerava que proporcionaven formes particularment harmonioses als objectes. Utilitza la calculadora per trobar un valor aproximat de ϕ .

Exercicis

- (1) Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida a les centèsimes:
 - (a) La diagonal d d'un rectangle de costats 3 i 5cm.
 - (b) El diàmetre d' d'una circumferència de 10cm de longitud.
 - (c) L'altura h d'un triangle equilàter de 4cm de costat.
 - (d) L'altura h' d'un con que mesura 6cm de radi i 9cm de generatriu.
- (2) El costat més petit d'un rectangle auri mesura 2cm. Quant mesura l'altre costat? Expressa'n el resultat de manera exacta i amb una aproximació arrodonida a les dècimes.
- (3) Sabent que els segments $PQ = PS = 1dm$, demostra que el segment QR mesura $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} dm$.

1.2 Nombres Irracionals

Si els nombres racionals s'expressen mitjançant els nombres decimals exactes o periòdics, hauríem de plantejar-nos com s'expressen els nombres irracionals. Sembla lògic pensar en els nombres decimals il·limitats no periòdics. Efectivament, podem considerar els nombres irracionals com aquells nombres decimals il·limitats les xifres dels quals no formen cap període. Per exemple:

1,040 040 004 000 04...

− 5,762 576 255 762 555 ...

Vegem, tot seguit, alguns nombres irracionals d'utilització freqüent.

1.2.1 L'arrel quadrada de 2: $\sqrt{2}$

A la calculadora apareix $\sqrt{2} = 1,414213562$.

Tenint en compte que l'última xifra decimal 2 és poc fiable perquè podria estar arrodonida, si el valor de $\sqrt{2}$ fos aquest, ens trobaríem davant d'un nombre racional, ja que es tracta d'un decimal exacte.

Si $\sqrt{2}$ no és racional, significa que darrere de l'última xifra decimal que ens proporciona la calculadora hi ha un nombre il·limitat d'altres xifres que en cap moment formen període.

De fet, si disposéssim d'un ordinador amb un programa adient, podríem conèixer força més xifres decimals de $\sqrt{2}$ i comprovar que no són periòdiques. De tota manera, un ordinador tampoc no ens podria proporcionar totes aquestes xifres decimals i és lícit que ens plantejem el dubte de si en algun moment les xifres decimals de $\sqrt{2}$ acaben repetint-se. L'objectiu és demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional.

Suposem el contrari, és a dir, que $\sqrt{2}$ és racional. Si això és cert, significa que es pot expressar en forma de fracció. Si representem per $\frac{a}{b}$ la seva fracció generatriu irreductible, podem escriure la igualtat següent:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

en què a i b són nombres primers entre ells. Si elevem el quadrat els dos membres de la igualtat, obtenim:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Això significa que hem pogut simplificar la fracció $\frac{a^2}{b^2}$ i hem obtingut com a resultat 2. Si reflexiones un moment, t'adonaràs que aquesta simplificació no hauria de ser possible, ja que si $\frac{a}{b}$ és una fracció irreductible, també ha de ser irreductible la fracció $\frac{a^2}{b^2}$. Arribem doncs, a una contradicció l'origen de la qual es troba en la suposició de partida.

$\sqrt{2}$ no es pot expressar en forma de fracció i, per tant, no és un nombre racional. En conseqüència, podem afirmar que $\sqrt{2}$ té un nombre il·limitat de xifres decimal no periòdiques. És un nombre irracional.

Ja saps que quan operes amb nombres racionals, les sumes, les restes, les multiplicacions, les divisions i fins i tot les potències d'exponent enter donen sempre com a resultat un altre nombre racional. No succeeix el mateix amb les arrels; de fet, les arrels de nombres racionals poques vegades donen com a resultat un altre nombre racional.

D'altra banda, si sumem, restem, multipliquem o dividim un nombre racional amb nombres irracionals obtenim nous nombres irracionals. Aquesta conseqüència també la podríem demostrar per reducció a l'absurd.

1.2.2 El nombre pi π

És el nombre irracional que has utilitzat més. És necessari per calcular longitud d'una circumferència. L'àrea d'un cercle o els volums dels cossos de revolució. Malgrat que a la pràctica considerem normalment $\pi = 3,14$, aquest valor no és més que una aproximació, que sol ser prou vàlida per als càlculs que efectuem de manera habitual. Ara bé, pensa que si π fos 3,14, seria un nombre racional i no és així. Demostrar que π és irracional no és senzill. Tot i que els grecs ja sospitaven la irracionalitat, no va ser fins al segle XVII que s'en va fer la demostració. La calculadora et proporciona una aproximació molt millor al valor del nombre π .

$$\pi = 3,141592654$$

1.2.3 El nombre e

Possiblement sigui un dels nombres més importants en el món científico-tecnològic. Tindràs ocasió de comprovar-ho a mesura que avancis en els teus estudis. En aquest curs l'analzarem amb detall, però pots obtenir-ne una aproximació prement les tecles $\boxed{1}$ i $\boxed{e^x}$ de la teva calculadora. A la pantalla apareix escrit el següent:

$$e = 2,718281828$$

Exercicis

- (4) Classifica els nombres següents segons si són racionals o irracionals:

- (a) $2,04\overline{5}$ (c) $1,\overline{9}$ (e) $4,3131131113\dots$
 (b) $-3,88080080008\dots$ (d) $\frac{113}{114}$ (f) $0,5\overline{8421}$

(5) Indica quins d'aquests nombres són irracionals:

- (a) $\sqrt{25}$ (d) $5e$ (g) $\sqrt{16+9}$
 (b) $1+\pi$ (e) $3+2\sqrt{49}$ (h) $\sqrt{25+36}$
 (c) $\sqrt{5}+3$ (f) $7\sqrt{5}$ (i) $\sqrt{2(16+9)}$

(6) Perquè el número $\frac{1,\hat{2}+0,25}{0,1\hat{6}}$ no pot ser irracional?

(7) Calcula l'àrea d'un cercle de $4cm$ de radi prenent els valors següents de π :

- (a) L'aproximació per defecte $3,1415$ (b) L'aproximació per excés $3,1416$

En quin dels dos casos has obtingut una millor aproximació a la mesura de la superfície d'aquest cercle? Perquè?

(8) Expressa de manera exacta:

- (a) La longitud d'una circumferència de $6cm$ de diàmetre.
 (b) L'àrea lateral d'un cilindre de $2cm$ de radi i $5cm$ de generatriu.
 (c) El volum d'un con de $5cm$ de radi i $13cm$ de generatriu.

(9) S'ha aconseguit determinar que el radi d'una circumferència mesura cm . Se'n pot conèixer amb exactitud la longitud? I l'àrea del cercle que limita? Justifica la resposta fent els càlculs corresponents.

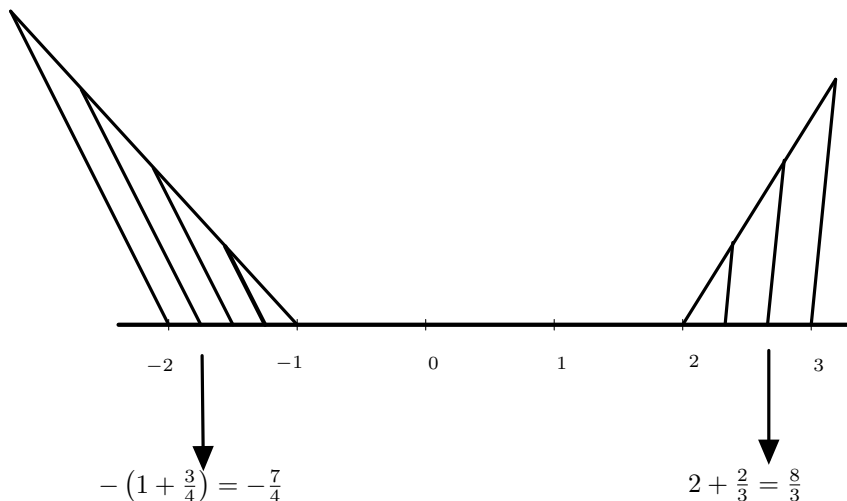
(10) Quant mesura la diagonal d'un cub de $2cm$ d'aresta? Expressa'n el resultat de manera exacta i aproxima'l a les centèsimes.

(11) La longitud d'una circumferència mesura $10\pi cm$.

- (a) Expressa'n el resultat aproximat a les centèsimes.
 (b) Quant mesura el radi d'aquesta circumferència?
 (c) Calcula l'àrea del cercle que limita i expressa-la de manera exacta.

1.3 Representació gràfica de nombres irracionals

Ja saps com es representen els nombres racionals a la recta numèrica:



A cada nombre racional li correspon un punt de la recta. Però també és cert que a cada punta de la recta li correspon un nombre racional? Si fos així, la recta estaria completa i no podríem representar-hi cap nombre irracional.

Entre dos nombres racionals qualssevol hi ha un nombre il·limitat d'altres nombres racionals. Considera, per exemple, el nombre racional que resulta d'efectuar-ne la semi-suma i repeteix el procés amb aquest i amb un dels altres dos. No acabaries mai!

En realitat, els nombres racionals no completen la recta. És més, si poguéssim representar-los, quedarien encara molts punts als quals no correspondria cap racional. En principi, podríem pensar que aquests punts estan reservats per als nombres irracionals.

En general, representar un nombre amb infinites xifres decimals no periòdiques és impossible i, per tant, ens haurem de conformar amb una representació aproximada. De tota manera, hi ha mètodes geomètrics que permeten representar a la recta numèrica alguns nombres irracionals.

Els nombres racionals i els irracionals aconsegueixen omplir tots els punts de la recta

Exemple 1

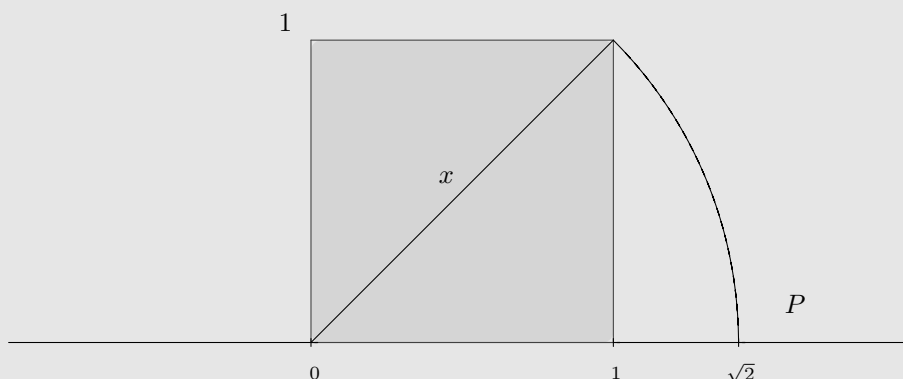
Representa $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{10}$.

Cal tenir clar que $\sqrt{2} = 1,41\dots$, és a dir, que $1 < \sqrt{2} < 2$. Observa la figura. Quant mesura la seva diagonal?

Si apliquem el Teorema de Pitàgores:

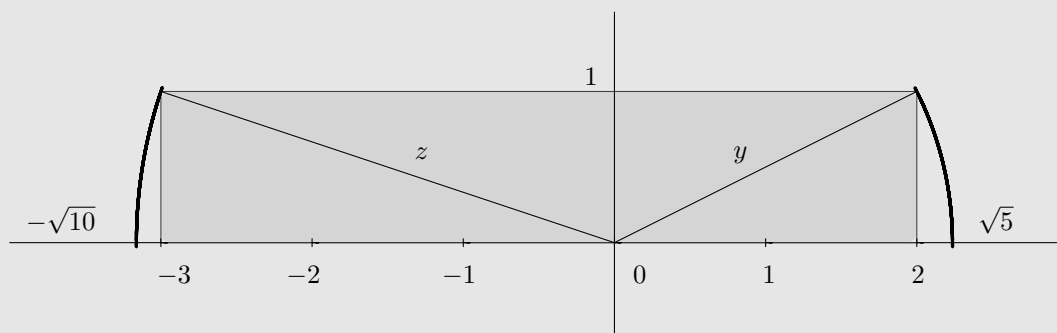
$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \longrightarrow x = \sqrt{2}$$

Amb ajuda d'un compàs podem representar exactament $\sqrt{2}$ a la recta numèrica.



Sabem que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional, per tant, el punt P de la recta no podria estar ocupat per cap nombre racional. Observa com hem representat els nombres irracionals $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{10}$

$$z^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \quad z = \sqrt{10} \quad -4 < \sqrt{10} < -3 \quad y^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad y = \sqrt{5} \quad 2 < \sqrt{5} < 3$$



- (12) Troba cinc nombres racionals compresos entre i i $i+1$, i ordena'ls de més petit a més gran.
- (13) Entre quins nombres enters consecutius es troba cadascun d'aquests nombres irracionals.

(a) $\sqrt{7}$

(b) $-\sqrt{13}$

- (14) Representa la recta numèrica els nombres irracionals següents:

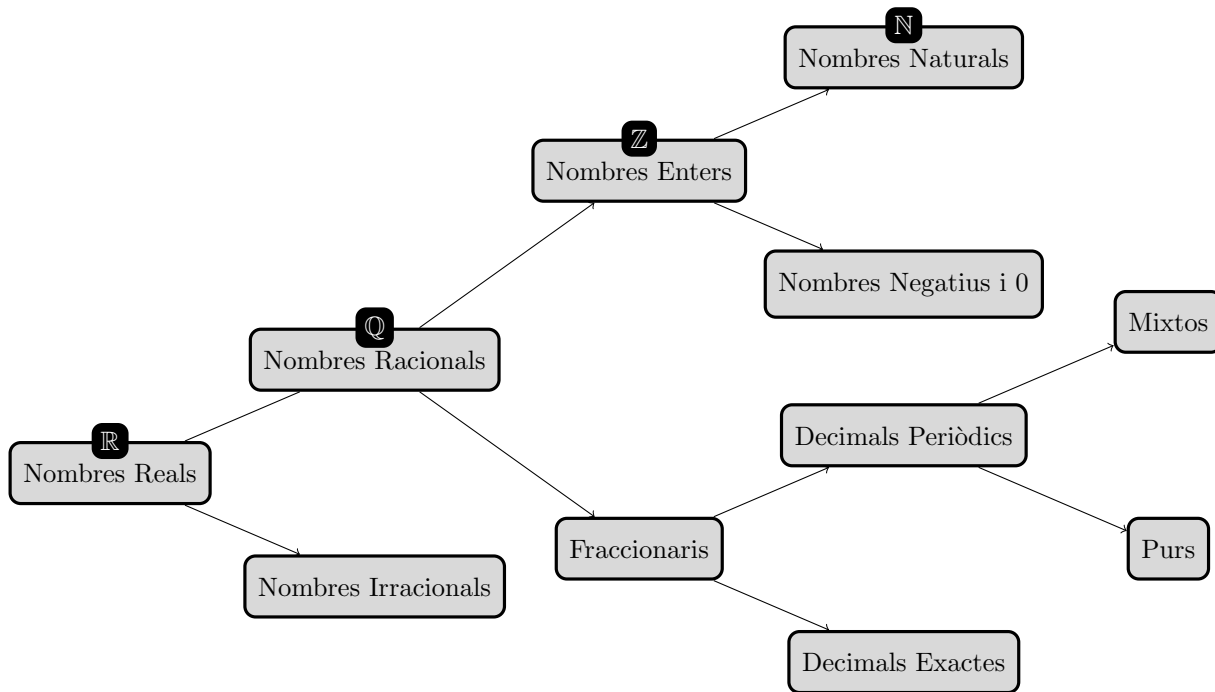
(a) $\sqrt{11}$

(b) $-\sqrt{8}$

1.4 Els nombres Reals: $\mathbb{R}$

El conjunt format pels nombres racionals i els irracionals s'anomena conjunt dels **nombres reals** i es representa amb $\mathbb{R}$. Recorda que els nombres naturals es representa per $\mathbb{N}$, els enters per $\mathbb{Z}$ i els racionals per $\mathbb{Q}$.

Tant els nombres racionals com els irracionals són, doncs, nombres reals. Els nombres reals omplen per complet la recta numèrica. És per aquest motiu que se l'anomena **recta real**. Fixat un origen i definida la unitat, a cada nombre real li correspon un únic punt de la recta, i a cada punt de la recta li correspon un únic nombre real. L'esquema següent t'ajudarà a recordar els diferents conjunts numèrics que coneixes:



El conjunt dels nombres reals és un conjunt ordenat, és a dir, donats dos nombres reals sempre podem saber quin és el més petit. Els nombres reals segueixen el mateix ordre que ha coneixes per als racionals. Hem fet ús d'aquesta propietat quan hem representat en l'apartat anterior alguns nombres irracionals a la recta. Si a i b representen dos nombres reals tals que $a < b$, es compleix que $b - a > 0$.

Cal que tinguis en compte que:

$$\text{Si } a < b \text{ i } b < c \longrightarrow a < c$$

Aquesta propietat es coneix amb el nom de **propietat transitiva** i ens permet ordenar les sèries de nombres reals.

Exercicis

- (15) Compara aquests parells de nombres reals:

- (a) $\frac{7}{5}$ i $\sqrt{2}$ (d) $\frac{\sqrt{10}}{8}$ i $\frac{\sqrt{10}}{9}$ (g) 4,9 i 5
 (b) π i $\sqrt{10}$ (e) $1 - \sqrt{2}$ i $-0,73$
 (c) $-\sqrt{6}$ i $-\sqrt{7}$ (f) $-1,9$ i -2 (h) $-1,3\hat{9}$ i $-1,4$

(16) Ordena del més petit al més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat que correspongui:

$$2,4\hat{5} \quad 2,99 \quad 2,\hat{9} \quad -\sqrt{2} \quad -1,42 \quad 0 \quad \frac{5}{2}$$

(17) Escriu dos nombres racionals compresos entre:

- (a) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$ (c) 4 i $\sqrt{17}$
 (b) $-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$ (d) e i π

1.5 Operacions amb nombres reals i propietats

Ja saps com es fan les operacions amb els nombres reals que són alhora racionals.

En cas que hi hagi algun nombre irracional, hauríem de treballar amb la quantitat il·limitada de xifres decimals i això és impossible.

En la pràctica, llevat d'algunes situacions particular que comentarem més endavant, les operacions en què intervenen nombres irracionals cal deixar-les indicades. És l'única manera d'expressar-ne exactament el resultat, que la majoria de vegades és un altre nombre irracional.

Així, la longitud d'una circumferència de 3cm de radi és:

$$L = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 3cm = 6\pi cm$$

I l'àrea del seu cercle:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3cm)^2 = 9\pi cm^2$$

Ara bé, si el que necessitem és un resultat aproximat, utilitzarem aproximacions decimal de cada nombre irracional.

D'aquesta manera, el que fem en realitat és substituir cada nombre irracional per un de racional que s'hi approximi, per la qual cosa el resultat que n'obtidrem també serà aproximat.

Si es vol, aquesta aproximació es pot millorar: només cal augmentar el nombre de xifres decimals de cada nombre irracional.

Per a l'exemple anterior i amb una aproximació fins a les centèsimes, obtenim els resultats següents:

$$L = 6\pi cm = 18,85cm \quad A = 9\pi = 28,27cm^2$$

Curiosament, algunes operacions amb arrels donen com a resultat un nombre racional. Això succeeix poques vegades, però és important adonar-se'n.

Exemple 2

Efectua les operacions següents i comprova que el resultat és un nombre racional.

- (a) $(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7^2} = 7$
 (b) $(6 + \sqrt{5}) + (6 - \sqrt{5}) = 6 + 6 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 12$
 (c) $(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 4^2 - (\sqrt{3})^2 = 16 - 3 = 13$
 (d) $(5\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot \sqrt{2^2} = 25 \cdot 2 = 50$

1.5.1 Propietats

Els nombres racionals també són nombres reals. Per tant, no tindria cap sentit que les operacions amb racionals verifiquessin unes propietats i, en canvi, les mateixes operacions amb reals en verifiquessin unes altres de diferents. Per tant, admetem que les propietats de les operacions amb nombres reals són les mateixes que en el cas dels racionals.

Recordem que per indicar que un número a pertany al conjunt dels nombres reals utilitzem la notació $a \in \mathbb{R}$.

Propietats d'Operacions amb Nombres $\mathbb{R}$

Suma

Si $a, b \in \mathbb{R}$ llavors $a + b \in \mathbb{R}$

- **Associativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Commutativa:** Si $a, b \in \mathbb{R}$
 $a + b = b + a$
- **Existència de l'element neutre 0:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $a + 0 = a$
- **Existència de l'element oposat:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $-a \in \mathbb{R}$ $a + (-a) = 0$
- **Distributiva de la multiplicació respecte de la suma:**
Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, llavors $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Aquesta propietat aplicada de dreta a esquerra, l'anomenem treure factor comú.

Multiplicació

Si $a, b \in \mathbb{R}$ llavors $a \cdot b \in \mathbb{R}$

- **Associativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{R}$
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Commutativa:** Si $a, b \in \mathbb{R}$
 $a \cdot b = b \cdot a$
- **Existència de l'element neutre 1:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $a \cdot 1 = a$
- **Existència de l'element invers:**
Si $a \in \mathbb{R}$ llavors $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ i $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Exercicis

(18) Expressa de manera exacta:

- (a) L'àrea d'un triangle equilàter de 4cm de costat
- (b) La longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual mesura 4 i 6cm
- (c) El volum d'un cilindre de 2cm de radi i 3cm d'altura
- (d) L'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de 8cm de diàmetre

(19) Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes cadascun dels nombres irracionals següents:

- (a) $\sqrt{17}$
- (b) e
- (c) π

(20) Extreu factor comú de:

- (a) $3\sqrt{1} + 5\sqrt{2}$
- (b) $4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$
- (c) $7\pi - 3\pi + \pi$
- (d) $\sqrt{5}a + \sqrt{5}b - \sqrt{5}c$

(21) Les aproximacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas:

- (a) $(\sqrt{10})^2$
- (b) $(3\sqrt{7})^2$
- (c) $(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3}$
- (d) $(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$
- (e) $(7\pi - 2\pi) : 3\pi$
- (f) $\sqrt{(7 - \sqrt{2})(7 + \sqrt{2})} - 11$

(22) Si x, y i z representen quatre nombres reals, escriu cadascuna d'aquestes expressions com un producte de dos factors:

- (a) $x^2y + xy^2$
- (b) $z^3 + z^2 + z$
- (c) $z(x - t) - x^2 + 2xt - t^2$
- (d) $x(y + z) + t(y + z)$
- (e) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x + y)$

1.6 Les arrels i les potències

Hem de conèixer la següent propietat:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ es llegeix com l'**arrel enèsima** de a , n és un nombre natural que s'anomena índex de l'arrel i a és el radicand.

Observa que:

- Si n és parell, a ha de ser necessàriament un nombre positiu per tal que l'arrel b sigui un nombre real. En aquest cas, hi ha dos resultats possibles que són sempre dos nombres reals oposats.
- Si n és senar, sempre existeix el nombre real b i és únic.

Tal com es defineix la radicació, és possible escriure una arrel en forma de potència i a l'inrevés. Aquestes noves potències hauran de verificar les mateixes propietats que les potències d'exponent enter, ja que coneixes de cursos anteriors. D'acord amb el que acabem de dir, podem escriure:

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \text{ perquè } (2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \text{ perquè } (5^{\frac{1}{3}})^3 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 5^1 = 5$$

$$\sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}} \text{ perquè } (6^{\frac{1}{5}})^5 = 6^{\frac{1}{5} \cdot 5} = 6^1 = 6$$

En general podem dir que:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ perquè } (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

Però si el radicand a està elevat a un exponent m enter, tindrem que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ perquè } (a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m = a^m$$

Les potències del tipus $a^{\frac{m}{n}}$ s'anomenen potències d'exponent fraccionari. En definitiva, tota arrel es pot expressar com una potència d'exponent fraccionari i a l'inrevés.

Exemple 3

Expressa aquestes arrels en forma de potències d'exponent fraccionari:

(a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

(e) $\sqrt{2^{-3}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

(b) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$

(f) $\sqrt[7]{16} = 16^{\frac{1}{7}} = (2^4)^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{4}{7}}$

(c) $\sqrt[7]{5^3} = 5^{\frac{3}{7}}$

(g) $\sqrt[3]{-6} = -6^{\frac{1}{3}}$

(d) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$

(h) $\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$

Exemple 4

Transforma les potències d'exponent fraccionari següents en arrels:

(a) $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}$

(e) $\pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$

(b) $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$

(f) $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$

(c) $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3}$

(g) $3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

(d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

(h) $\left(\frac{5}{13}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{13}{5}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{13}{5}}$

Exercicis

(23) Calcula quan puguis els següents radicals:

(a) $\sqrt[3]{1000}$

(c) $\sqrt{\frac{25}{81}}$

(e) $\sqrt[3]{0,001}$

(b) $\sqrt[4]{1296}$

(d) $\sqrt[5]{-1}$

(f) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$

(24) Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls.

(a) $\sqrt{\frac{8}{18}}$

(b) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}}$

(c) $\sqrt{\frac{50}{98}}$

(d) $\sqrt[3]{\frac{3}{81}}$

(25) Expressa en forma de potència:

(a) $\sqrt[3]{7}$

(c) $\sqrt{10}$

(e) $\sqrt[6]{6^5}$

(b) $\sqrt[4]{a^3}$

(d) $\sqrt[5]{(a+2)^2}$

(f) $\sqrt{\frac{1}{5}}$

(26) Expressa en forma d'arrel:

(a) $b^{\frac{2}{7}}$

(b) $25^{\frac{1}{3}}$

(c) $12^{\frac{1}{4}}$

(d) $a^{\frac{1}{3}}$

(e) $25^{\frac{1}{3}}$

(27) Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:

(a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

(c) $(5^{\frac{1}{3}})^2$

(d) $\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

(b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$

(28) Utilitza la calculadora i aproxima fins a les centèsimes aquests nombres irracionals:

(a) $\sqrt[3]{10}$

(c) $\pi^{\frac{1}{4}}$

(e) $5^{\frac{2}{3}}$

(b) $\sqrt[5]{2,76}$

(d) $\sqrt[3]{-50}$

(f) $\sqrt[7]{2^4}$

1.7 Propietats de les arrels

Les propietats que estudiarem a continuació es basen en:

- La possibilitat d'expressar una arrel en forma de potència d'exponent fraccionari.
- Les propietats de les potències d'exponent enter que hem fet extensives a les potències d'exponent fraccionari

1.7.1 Propietat fonamental

Observa la seqüència d'igualtats següents:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}$$

En general podem dir que el resultat d'una arrel no varia si multipliquem o dividim l'índex i l'exponent del radicand per un mateix nombre diferent de zero:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot r}{n \cdot r}} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}, \text{ amb } r \neq 0$$

D'aquesta manera tenim que:

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[10]{a^5} = \dots$$

1.7.2 Arrel d'una multiplicació

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

En general podem dir que l'arrel d'una multiplicació és igual al producte de les arrels dels factors.

$$\sqrt[n]{(a \cdot b)} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

1.7.3 Arrel d'una divisió

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$$

En general podem dir que la divisió és igual al quocient de les arrels del dividend i del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

1.7.4 Potència d'una arrel

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$$

En general per tal d'eleva una arrel a una potència, s'eleva el radicand a aquesta potència.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1.7.5 Arrel d'una arrel

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$$

En general, l'arrel d'una arrel dona com a resultat una altra arrel del mateix radicand i d'índex igual al producte dels dos índexs:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Si fem un resum de totes les propietats:

- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$, amb $r \neq 0$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Exercicis

(29) Per simplificar una arrel del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, cal aconseguir que m i n siguin nombres primers entre si. Simplifica:

(a) $\sqrt[12]{a^{10}}$

(c) $\sqrt[15]{3^{10}}$

(b) $\sqrt[3]{a^{12}}$

(d) $\sqrt[4]{64}$

(30) Quina de les igualtats següents és incorrecta?

(a) $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$

(b) $\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+b$

(c) $\sqrt{a^2-2ab+b^2} = a-b$

(31) Expressa en forma d'una sola arrel:

(a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

(e) $(\sqrt[7]{2^3})^4$

(i) $\sqrt{\sqrt{13}}$

(b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

(f) $3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

(j) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$

(c) $\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$

(g) $(a+b)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a-b}$

(d) $\frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$

(h) $2\sqrt{5}$

1.8 Operacions amb arrels

Malgrat que la majoria d'operacions amb arrels dona com a resultat una altra arrel que gairebé sempre és un nombre irracional i, pertant, només el podem expressar de manera exacta si el deixem indicat, hi ha alguns casos en què cal anar una mica més lluny per tal d'expressar-ne el resultat d'una manera més senzilla. Vegem-los tot seguit.

1.8.1 Sumes i restes

Si el resultat és $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, no podem fer res més. Ja saps que, com a molt, podem dobar-ne una aproximació.

Ara bé, si el resultat és $3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}$, si que es pot expressar de manera més senzilla.

Només cal extreure el factor comú $\sqrt{3}$:

$$3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 - 1 + 2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Ès possible que el factor comú que necessitem no sempre sigui tan evident com en el cas anterior.

Si descomponem el radicannd en factors i apliquem les propietats que ja coneixem, el podem localitzar. Fixa't en l'exemple:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20} - \sqrt{125} &= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2^2} \cdot 3\sqrt{5} - \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = \\ &= 2\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (2 + 6 - 5)\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

1.8.2 Multiplicacions i divisions

Per multiplicar i dividir arrels que tenen el mateix índex. És possible fer-ho si els índexs són diferents? Imagina't que el resultat d'una operació sigui $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$. Vegem com es pot expressar de manera més senzilla utilitzant una única arrel.

Cal aconseguir que les arrels que s'han de multiplicar tinguin el mateix índex. Si les expressem en forma de potència i busquem fraccions equivalents d'igual denominador per als exponents, tindrem el problema resolt. Aplicant directament al propietat fonamental dels radicals, ens estalviem el pas previ a potències:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}$$

Si es tracta d'una divisió, el procés que hem de seguir és semblant:

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{12}}}{5^{\frac{4}{12}}} = \frac{\sqrt[12]{2^3}}{\sqrt[12]{5^4}} = \sqrt[12]{\frac{8}{625}}$$

Exercicis

(32) Expressa de la forma més senzilla:

(a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{10}$

(c) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

(b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

(d) $\frac{\sqrt{7} \sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

1.9 Racionalització de denominadors

És possible que alguna vegada et trobis amb expressions fraccionàries que tenen arrels en el denominador. Aquí en tens dos exemples:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{3 - \sqrt{2}}$$

Com pots veure, són dos nombres irracionals i, per tant, no en podem conèixer el valor exacte. De tota manera, si el que volem és fer-hi operacions, seria molt més senzill si per a cada expressió fraccionària poguéssim trobar-ne una d'equivalent sense arrels en el denominador.

A més, per sumar i restar fraccions, és necessari que els seus denominadors siguin nombres naturals per poder-ne calcular el m.c.m. Ja saps com obtenir fraccions equivalents a una fracció donada: multiplicar-ne el numerador i el denominador per un mateix nombre diferent de zero. El problema és esbrinar en cada situació quin és aquest nombre que ens permet eliminar les arrels del denominador.

El procés que se segueix per eliminar les arrels del denominador de les expressions fraccionàries es coneix amb el nom de racionalització de denominadors.

Els dos exemples que acabem de citar pertanyen alt tipus d'expressions fraccionàries que et trobaràs més sovint. Observa com procedim en cada cas.

Exemple 5

Racionalitzem l'expressió fraccionària següent: $\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt{3}$:

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Exemple 6

Racionalitzem l'expressió fraccionària següent: $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$.

Multipliquem el numerador i el denominador pel **conjugat** del que tenim al denominador, $3 + \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

Per tant, podem dir que

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

Exercicis

(33) Racionalitza les expressions fraccionàries que apareixen a continuació:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(b) $\frac{12}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

(d) $\frac{22}{4 - \sqrt{5}}$

(34) Efectua les operacions indicades racionalitzant prèviament cada expressió fraccionària:

(a) $\frac{1}{5 + \sqrt{3}} - \frac{2}{5 - \sqrt{3}}$

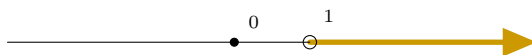
(b) $\frac{7}{4 + \sqrt{2}} - \frac{6}{4 - \sqrt{2}}$

1.10 Les solucions d'inequacions i la recta real

Quines són les solucions de la inequació $2x + 3 > 5$?

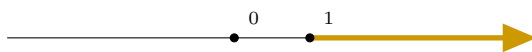
$$2x + 3 > 5 \implies 2x > 5 - 3 \implies 2x > 2 \implies x > 1$$

La resposta és: tots els nombres reals més grans que 1. Els nombres reals més grans que 1, l'1 no hi és inclòs, determinen un conjunt de punts anomenat semirecta oberta i que es designa per $(1, +\infty)$.



La inequació $2x + 3 > 5$ té per solució $x \geq 1$.

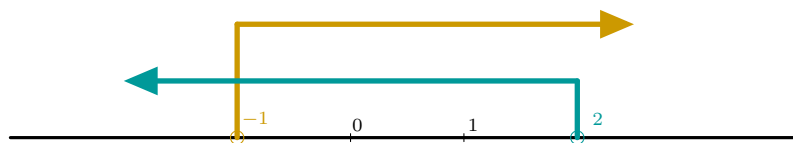
Els nombres reals més grans o iguals que 1, determinen un conjunt de punts anomenat semirecta tancada i que es designa per $[1, +\infty)$.



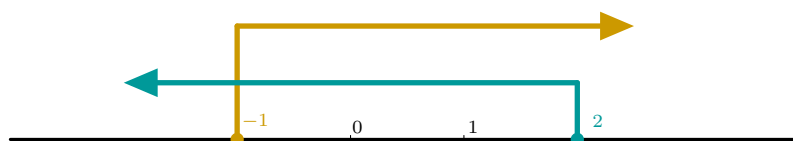
Si ara mostrem la semirecta oberta $(-\infty, -2)$ i la semirecta tancada $(-\infty, -2]$ Obtenim aquests dos gràfics



Les inequacions $x > -1$ i $x < 2$ tenen solucions comunes. Si observem la següent figura, comprovarem que són tots els nombres reals compresos entre -1 i 2 , ni el -1 ni el 2 hi són inclosos. Aquests nombres determinen un conjunt de punts que es coneix amb el nom de **segment** o **interval obert** i que es designa per $(-1, 2)$.

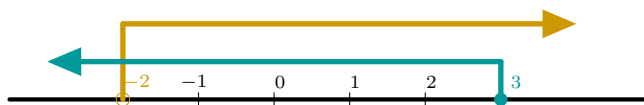


Les solucions comunes a les inequacions $x \geq -1$ i $x \leq 2$ són tots els nombres reals compresos entre -1 i 2 , ambdós inclosos. Determinen sobre la recta un conjunt de punts que rep el nom de **segment** o **interval tancat** i que s'expressa per $[-1, 2]$.



També podem tenir combinacions, és a dir, intervals semioberts o semitancats. Fixa't en els següents exemples.

$-2 < x \leq 3$ s'expressa per $(-2, 3]$ No s'inclou el -2 , però sí el 3 .



$-2 \leq x < 3$ s'expressa per $[-2, 3)$ Inclou el -2 , però no el 3 .



Exercicis

(35) Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Després, defineix-lo mitjançant desigualtats:

- | | | | |
|--------------------|---------------|--------------------|-------------------|
| (a) $[4, +\infty)$ | (d) $(2, 5)$ | (g) $[5, +\infty)$ | (j) $[-5, 8)$ |
| (b) $(-\infty, 5)$ | (e) $[-3, 0)$ | (h) $[-2, 2)$ | (k) $(-3, 4)$ |
| (c) $[1, +\infty)$ | (f) $(0, 3]$ | (i) $(-4, 2]$ | (l) $(-1, -0, 5]$ |

(36) Expressa utilitzant la nova notació els conjunts de nombres reals que verifiquen:

- | | | |
|-------------------------|----------------------|----------------|
| (a) $-3 < x < 6$ | (c) $-5 \leq x < 10$ | (e) $x \geq 1$ |
| (b) $-4 \leq x \leq -1$ | (d) $-7 < x \leq -3$ | (f) $x < -3$ |

1.11 Notació científica

El treball científic obliga a utilitzar amb freqüència nombres que són molt grans o molt petits. L'escriptura d'aquests nombres resulta feixuga i pot provocar nombrosos errors. La notació científica permet expressar-los de manera més senzilla, i facilita al mateix temps les operacions que s'hi realitzen. Aquesta notació consisteix a escriure tot nombre nombre x no nul de la forma següent:

$$x = m \cdot 10^n \quad 1 \leq m < 10 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{Z}$$

on m s'anomena mantissa i n exponent.

Exemple 7

Escriu amb notació científica els nombres següents:

(a) $0,000\,000\,008\,7 = 8,7 \cdot 10^{-9}$

(c) $345\,500\,000\,000\,000\,000 = 3,455 \cdot 10^{17}$

(b) $6\,250\,000\,000\,000 = 6,25 \cdot 10^{12}$

(d) $0,000\,000\,000\,000\,05 = 5 \cdot 10^{-14}$

Exercicis

(37) Escriu en notació científica els següents nombres:

(a) $0,00345 \cdot 10^8$

(d) $756\,423\,987$

(f) La població mundial

(b) $126,78 \cdot 10^{-5}$

(e) La distància de la Terra al

(c) $\frac{13}{5789680}$

Sol

(38) Efectua aquestes operacions amb l'ajuda de la calculadora. Expressa'n els resultats utilitzant la notació científica.

(a) $2,5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6,25 \cdot 10^3$

(c) $\frac{1,25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}$

(b) $(10^6 : 4 \cdot 10^{-3}) : (5 \cdot 10^7)$

(d) $(10^{-14} - 10^{-14})^2$

(39) Una estrella es troba a 4 anys llum de la Terra. Quina es la distància en quilòmetres que la separa del nostre planeta? Un any llum és la distància que recorre la llum en un any a una velocitat de $300\,000 \frac{km}{s}$

(40) Sabent que un mol d'àtoms de ferro són $6,023 \cdot 10^{23}$ àtoms d'aquest metall i que té una massa de $55,8g$, esbrina:

(a) La massa en grams d'un àtom de ferro

(b) El nombre d'àtoms continguts en $1g$ de ferro

(41) Expressa en notació científica la longitud en metres del radi de la Terra, sabent que un quadrat d'un meridià terrestre mesura $10^4 km$.

(42) Demuestra, sense utilitzar la calculadora, que el número $\sqrt{1764}$ és racional. Realitza prèviament la descomposició en factors primers de 1764.

(43) Calcula el costat, el perímetre i l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de $2cm$ de radi. Quina de les tres mesures s'expressa mitjançant un nombre racional? Expressa les altres dues de manera exacta i amb una aproximació que arribi fins a les centèsimes.

(44) Dibuixa un quadrat de $2cm$ de costat. Determina els punts mitjans dels seus costats i uneix-los successivament. Quina figura n'obtens? Per què? Calcula'n l'àrea i el perímetre.

(45) Quina condició han de verificar els coeficients a , b i c de l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, per tal que les seves solucions siguin nombres reals?

(46) El perímetre d'un rectangle mesura 16cm i una de les seves diagonals, $2\sqrt{10}\text{cm}$. Calcula'n l'àrea.

(47) Troba quatre nombres racionals que estiguin compresos entre $2 + \sqrt{5}$ i $2 + \sqrt{6}$.

(48) Representa a la recta numèrica els nombres reals següents:

(a) $\frac{3}{4}$

(b) $1,1\hat{6}$

(c) $\sqrt{34}$

(d) $-\sqrt{8}$

(49) Calcula

(a) $(3\sqrt{5})^2$

(d) $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$

(g) $(3 - \sqrt{3})^2$

(b) $(\sqrt{10})^4$

(e) $(1 + \sqrt{2})^2$

(c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

(f) $(2\sqrt{5} + 1)^2$

(h) $(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

(50) En quins casos el resultat d'una potència de base 3 és més petit que 3? Justifica la teva resposta amb exemples.

(51) Expressa com una sola potència:

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

(b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

(c) $\sqrt[7]{a^2}$

(d) $(\sqrt[4]{b^3})^2$

(52) L'arrel quadrada de l'arrel cúbica d'un nombre positiu x té dos possibles resultats. Per què? Si un d'aquests és 2, quin és l'altre? Calcula x .

(53) Calcula

(a) $\frac{200}{450}$

(b) $\frac{3}{27}$

(c) $\frac{242}{338}$

(54) Calcula

(a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}}$

(b) $7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5}$

(c) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}}$

(d) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{13}$

(55) Indica quines de les igualtats següents no són certes

(a) $\sqrt{9+25} = 3+5$

(b) $\sqrt{7 \cdot 6} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$

(c) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

(d) $\sqrt{5} = \frac{\sqrt{45}}{3}$

(56) Justifica aquestes igualtats:

(a) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

(b) $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

(c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

(d) $a^2 \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{2n+1}}$

(57) Expressa de la manera més senzilla possible el resultat de les operacions següents:

(a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

(c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

(b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$

(d) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$

(58) Racionalitza:

(a) $\frac{20}{\sqrt{10}}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

(c) $\frac{6 + \sqrt{6}}{6 - \sqrt{6}}$

(59) Les solucions d'una inequació es troben a l'interval $[-5, 2]$, i les d'una altra inequació, a l'interval $[0, 4]$. Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.

(60) Digues de manera raonada, si les afirmacions següents són certes o falses.

(a) $\sqrt[3]{-343}$ és un nombre racional.

- (b) El nombre real $\frac{2+\pi}{5}$ està comprès entre els nombres naturals 1 i 2.
- (c) -4 és un nombre racional.
- (d) El resultat de $\sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75}$ és 0.
- (61) Expressa de manera exacta:
- (a) El volum d'un cub de 3cm de diagonal.
- (b) L'àrea lateral d'un con amb una base de 5cm de radi i de 12cm d'altura.
- (c) El radi d'una esfera de 27cm^3 de volum.
- (d) La hipotenusa d'un triangle rectangle en el qual un dels catets mesura el doble que l'altre.
- (62) Expressa en forma d'una sola arrel:
- (a) $\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[7]{b^2}$ (b) $\frac{3}{\sqrt[3]{y^2}}$ (c) $(p\sqrt[4]{p^3})^5$ (d) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x}}$
- (63) Calcula i expressa de la manera més senzilla possible:
- (a) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 7\sqrt{3})$ (c) $(5 + 2\sqrt{7}) - (5 - 2\sqrt{7})$
- (b) $3\sqrt{75} - \sqrt{300} + \frac{1}{2}\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$
- (64) Fes les operacions indicades, racionalitzant prèviament les expressions fraccionàries:
- (a) $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} - \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{32}} \right)$

Capítol 2

Equacions

Una **equació** és una igualtat entre expressions matemàtiques que només és certa per a certs valors de les variables que formen aquestes expressions. Aquestes variables s'anomenen normalment incògnites. Els valors que poden prendre les incògnites s'anomenen solucions de l'equació i solucionar una equació vol dir trobar aquests valors. Per exemple

$$3x - 5 = 7$$

és una equació d'una sola incògnita, la x . Com es pot comprovar fàcilment, qualsevol valor de x no compleix l'equació, només un valor, $x = 4$, que és la seva solució.

Habitualment es reserven les lletres del final de l'alfabet, x, y, z , etc. per indicar les incògnites de les equacions.

A les dues expressions que igualem se les anomena termes de l'equació. En la majoria de casos una equació tindrà només dos termes.

En el cas en què es tinguin diverses equacions que s'han de verificar simultàniament, es parla de sistemes d'equacions. Segons la potència màxima a que està elevada la incògnita de l'equació es parla d'**equacions de primer grau**, **equacions de segon grau**, etc.

2.1 Equacions de primer grau

- (1) El perímetre d'un quadrat fa $44m$. Quant fa de costat?
- (2) Busca dos nombres que sumen 110, sabent que la seva diferència és de 36 unitats.

Exemple 1

Explicarem com podem resoldre aquest equació:

$$x + 8 = 13$$

Primer de tot, hem d'aïllar la x . Per tant, el que volem és treure el 8 de la part de l'esquerra de l'igual. Per passar-lo a l'altre costat ens cal canviar-lo de signe, com que tenim un $+8$ passarem a tenir un -8 a l'altra banda:

$$\begin{array}{c} x + 8 = 13 \\ \downarrow \\ x = 13 - 8 \end{array}$$

Finalment fem les operacions que podem, i obtenim el resultat final:

$$x = 5$$

Exemple 2

La suma d'un nombre amb el seu doble és 78. Quin és aquest nombre?

Procediment:

1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quin és aquest nombre?

2ⁿ. **Definim la variable o incògnita:** $x = \text{nombre}$

3^r. **Escrivim en llenguatge algèbric:**

La suma d'un nombre, x , amb el seu doble, $2x$, és 78: $x + 2x = 78$

4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} x + 2x &= 78 \\ 3x &= 78 \\ x &= \frac{78}{3} \\ x &= 26 \end{aligned}$$

5^è. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: El número és el 26

Exemple 3

En una llibreria, comprem 3 llibres del mateix preu i 5 llibretes a 3€ cada una. En total paguem 36€. Quant val cada llibre?

Procediment:

1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quan val cada llibre?

2ⁿ. **Definim la variable o incògnita:** $x = \text{preu de cada llibre}$

3^r. **Escrivim en llenguatge algèbric:**

En una llibreria, comprem 3 llibres del mateix preu i 5 llibretes a 3€cada una.
En total paguem 36€: $3x + 5 \cdot 3 = 36$

4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} 3x + 5 \cdot 3 &= 36 \\ 3x + 15 &= 36 \\ 3x &= 36 - 15 \\ 3x &= 21 \\ x &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

5^è. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: Cada llibre val 7€

Resol les següents equacions:

(3) $4x - 24 = 0$

(4) $7x + 21 = 0$

(5) $3x - 2 = 0$

(6) $9x + 6 = 0$

(7) $8x - 12 = 0$

(8) $12x + 20 = 0$

(9) $23x + 69 = 0$

(10) $54x - 90 = 0$

(11) $30x - 18 = 0$

(12) $144x + 1024 = 0$

(13) $7x - 15 = 0$

(16) $8x - 3 = 6x + 7$

(14) $8x - 7 = 57$

(17) $4x + 8 = x - 4$

(15) $7x + 5 = 6x + 14$

(18) $5x + 13 = 3x + 5$

(19) Quin nombre multiplicat per 7 dóna 245?

(20) Si al doble dels diners que tinc li sumo 72€, obtinc 196€. Quants diners tinc?

(21) El triple d'un nombre més 7 és 43. Calcula'l.

Exemple 4

En preguntar-li l'edat a en David, ens respon: "Si al doble de la meua edat li restem 17 anys s'obté el que em falta per arribar a 100 anys". Quina edat té?

Procediment:

1^r. **Llegim l'exercici i pensem què ens demana:** Quina edat té?

2ⁿ. **Definim la variable o incògnita:** x = edat d'en David

3^r. **Escrivim en llenguatge algebri:**

Si al doble de la meua edat li restem 17 anys s'obté el que em falta per arribar a 100 anys: $2x - 17 = 100 - x$

4^t. **Resolem l'equació:**

$$\begin{aligned} 2x - 17 &= 100 - x \\ 2x + x &= 100 + 17 \\ 3x &= 117 \\ x &= \frac{117}{3} \\ x &= 39 \end{aligned}$$

5^è. **Deixem ben clara la resposta:**

RESPOSTA: En David té 39 anys

(22) Troba un nombre que augmentat en 17 doni 43.

(23) Troba un nombre tal que en restar-li 31 doni com a resultat 13.

(24) Troba un nombre que sumat a 15 doni el triple de 23.

(25) El perímetre d'un triangle equilàter és 81 m. Troba quant fa el seu costat.

Exemple 5

Resolem ara la següent equació amb parentèsi:

$$4(x - 2) = 12 - x$$

Primer de tot hem de multiplicar el 4 per tot el que hi ha dins el parèntesi tenint molt en compte els signes:

$$\begin{aligned} 4(x - 2) &= 12 - x \\ 4 \cdot x - 4 \cdot 2 &= 12 - x \end{aligned}$$

I l'acabem resolent tal i com sabem:

$$\begin{aligned} 4x - 8 &= 12 - x \\ 4x + x &= 12 + 8 \\ 5x &= 20 \\ x &= \frac{20}{5} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(26) $3x + 1 = 4x - 7$

(27) $12 - x = 4x - 3$

(28) $35 - 2x = 3x - 45$

(29) $6x - 13 = 15 - 8x$

(30) $9x - 3 = 22x - 42$

(31) $15x - 128 = 22$

(32) $210x - 505 = 10x + 95$

(33) $25x - 15 = 90 - 45x$

(34) $5x + 8 = 4x + 12$

(35) $7x + 9 = 8x + 2$

(36) $18 - 2x = 5x + 4$

(37) $52 + 13x = 65 - 78x$

(38) $250 - 20x = 55x + 25$

(39) $4120 - 58x = 24 + 6x$

(40) $x + 3(x - 2) = 3x - 1$

(41) $205 = 3x - (15 + 8x)$

(42) $7 + 5(6 - 2x) = 5x - 8$

(43) $140 = 7x - (13 - 2x)$

(44) $12(x - 2) + 7(x + 2) = 9$

(45) $2x - 5 = 3 - 6(-22 - 2x)$

(46) $4(9 + 27x) = 18x + 6$

(47) $6 - 3x = 3(4 - 5x)$

(48) $5(35 - 8x) = 6(3x - 30) + 7$

(49) $4x - 2(x + 8) = 2x + 3(4 - x)$

(50) $x - 2(x - 1) + 3(4 - 2x) = 3x + 2(x - 5)$

(51) $3x - (x + 2) + 7 = 2(x + 4) - 3x - (2 - 5x)$

(52) $2(x - 3) - 3(x - 4) = 1$

(53) $8(3x - 2) - 4(4x - 3) = 6(4 - x)$

(54) Amb 7 bitllets iguals tenim 350€. Quin és el valor de cada bitllet?

(55) Si al triple d'un nombre li restem 13 unitats, obtenim 86. Quin és aquest nombre?

(56) Si a un nombre li afegim el quàdruple té com a resultat 225. Quin nombre és aquest?

(57) La diferència entre un nombre i el seu doble és -4 . Quin és aquest nombre?

(58) El doble d'un nombre més el seu triple dona 125. Quin és aquest nombre?

(59) La meitat dels conills d'una gàbia sumen 36 potes. Quants conills hi ha?

(60) Troba un nombre que sigui igual al seu triple menys 16.

(61) Troba un nombre tal que després de sumar-li 72 dona com a resultat el doble menys 46 unitats.

- (62) Busca un nombre el quàdruple del qual és igual al mateix nombre augmentat en 36 unitats.
- (63) El doble d'un nombre més 5 és igual al seu triple menys 19. Quin és aquest nombre?
- (64) Troba un nombre tal que el seu doble augmentat en una unitat sigui igual al seu triple disminuït en tres unitats.
- (65) Si a un nombre hi sumem el seu triple i el seu doble, el resultat és 54. Quin és aquest nombre?
- (66) El perímetre d'un quadrat després d'augmentar 5cm el costat és 168cm . Quina és la mida del costat del quadrat inicial?
- (67) En un rectangle, un costat és quatre vegades més gran que l'altre, i el perímetre és 100cm . Calcula les longituds de cada costat.
- (68) Troba un nombre el triple del qual menys 5 sigui igual a la seva meitat.
- (69) Troba un nombre el doble del qual més el seu triple menys la seva meitat menys la seva tercera part sigui 1875.
- (70) Troba un nombre si sabem que 11 vegades aquest nombre més 10 unitats és igual a 14 vegades aquest nombre menys cinc unitats.
- (71) Si sumem 9 a un nombre i dividim el resultat entre 5, obtenim el mateix que si restem 9 i dividim el resultat entre 2. De quin nombre es tracta?

- | | |
|--|---|
| (72) $2x + 5 = 35 - 4x$ | (83) $4(x - 4) + 4x - 4(4 - x) = 4(4x - 4) + 4(4 - 4x)$ |
| (73) $3(3x + 1) - (x - 1) = 6(x + 10)$ | (84) $3 - 4(x - 5) + 2x = 5 + 3(x + 1)$ |
| (74) $2[x - 3(x - 1)] + 3 = x - 3(x + 1)$ | (85) $4 - (-6 - x) - 3x = 5 - 2x - (4x + 3)$ |
| (75) $x + 2 - (2 - x) = 2x - 1 - (1 - 2x)$ | (86) $3(x + 1) + 4(x + 3) = 22$ |
| (76) $2[x + 2(3x - 2)] = 4x + 16$ | (87) $7(x + 2) + 9(x + 6) = 116$ |
| (77) $5(x - 3) = 10$ | (88) $4(x + 4) + 6(x + 5) = 66$ |
| (78) $1 - 3x = 4x + 5 - (4 - x)$ | (89) $5(x + 8) + 3(x + 1) = 99$ |
| (79) $15x - 5(x - 1) = 120 - 5x$ | (90) $6(2x + 9) + 2(4x - 1) = 112$ |
| (80) $7 + 3(2 + x) - 3x = 9 + 2x$ | (91) $2(7x - 1) + 8(3x + 5) = 304$ |
| (81) $4 - 2(x + 3) = 13 - 5(x + 4)$ | (92) $3(2x + 9) + 7(x - 2) = 26$ |
| (82) $1 - 3x - 2(x - 1) = 5(1 - 2x) + 7$ | (93) $8(5x - 3) + 3(2x + 6) = 86$ |

- (94) La quarta part dels meus diners menys 50€ són 120€. Quants diners tinc?
- (95) Calcula el nombre que sumat a la seva meitat fa 81.
- (96) La tercera part de la meua edat sumada a la seva meitat són 15 anys. Quina edat tinc?
- (97) La meitat d'un nombre menys 5 unitats fa 23. Quin és aquest nombre?
- (98) Un nombre augmentat en la tercera part dona 72. Quin és aquest nombre?
- (99) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

- (a) 5 menys el doble de la suma de x i 4 és igual a 3.
- (b) quatre vegades la diferència entre x i 2 més el doble de la suma de x i 3 és 10.
- (c) La meitat de la diferència entre 5 i x és igual a la tercera part de la suma de x i 5.
- (d) El triple de la suma de 6 i el doble de x , menys el doble de la diferència entre x i 4 és 2.
- (e) Sis més el doble de la diferència entre x i 3 és igual a la cinquena part de la suma de x i 9.

- (100) Expressa algèbricament i resol l'equació resultant:

- (a) El triple d'un nombre sumat a la meitat del mateix nombre dóna com a resultat 14.
- (b) La quarta part del nombre de pàgines d'un llibre sumada a 189 ens dóna el nombre total de pàgines del llibre.
- (101) Quin nombre disminuït en $\frac{1}{3}$ d'ell mateix dóna 2?
- (102) A 1^r d'ESO hi ha 13 noies més que nois. Si en total hi ha 83 alumnes, quantes noies hi ha?
- (103) En un ball hi ha 5 noies més que nois. Si en total a la pista hi ha 77 persones, quants són nois i quantes són noies?
- (104) La base d'un rectangle és el doble que l'altura, i el seu perímetre és 78cm. Quines són les dimensions del rectangle?
- (105) El perímetre d'un rectangle és 26cm. Si la base mesura 3cm més que l'altura, quines són les dimensions del rectangle?
- (106) Hem de repartir 152 adhesius entre tres nens, de manera que el segon en tingui 8 més que el primer i que el tercer en tingui 16 més que el segon. Com ho farem?
- (107) Per comprar 7 discos compactes em falten 12€, però si només compro 5, em sobren 18€. Si tots els compactes valen igual, quant en val un?
- (108) Descompon 60 en dues parts de tal manera que el triple de la primera més el doble de la segona sumi 152.
- (109) Troba tres nombres consecutius tals que restant el doble del més gran al triple de la suma dels dos més petits s'obtingui el nombre 527.
- (110) Una prova consta de 20 qüestions. Per cada qüestió contestada correctament, un alumne guanya 3 punts; però per cada qüestió contestada malament o no contestada, en perd 2. Si al final de la prova un alumne va aconseguir 30 punts, quantes qüestions va contestar correctament?
- (111) Tinc 12 monedes, unes de 5€ i altres de 2€. Quantes monedes tinc de cada si sumen un total de 51€?
- (112) Un dromedari té un gep, i un camell en té dos. En un ramat de camells i dromedaris hem comptat 86 caps i 148 geps. Quants camells hi ha? I quants dromedaris?
- (113) Dos nombres sumen 70. Si dividim el més gran entre 10 i el més petit entre 3 i sumem els resultats, dóna 14. Esbrina quins són aquests nombres.
- (114) Reparteix 600€ entre dues persones de manera que a una hi correspongui els $\frac{2}{3}$ del que li correspon a l'altra.
- (115) Les edats de quatre amics sumen 138. Troba l'edat de cada un d'ells sabent que cada un es porta 3 anys de diferència amb el següent.
- (116) Dos germans es porten una diferència de 3 anys, i dintre de 4 anys les seves edats sumades faran 33. Calcula-les.
- (117) El triple de l'edat que tenia en Jordi fa 4 anys és el doble de la que tindrà d'aquí a 8 anys. Quina és l'edat actual d'en Jordi?
- (118) Una mare té 49 anys i la seva filla, 26. Quants anys fa que l'edat de la mare era el doble que la de la filla?
- (119) L'edat de la Cristina és el triple de la d'en Jordi, i d'aquí a 20 anys serà el doble. Calcula les edats actuals de les dues persones.
- (120) La diferència entre les edats d'un pare i la seva filla és 25 anys. Fa 15 anys l'edat de la filla era el doble de l'edat del pare. Quina és l'edat actual del pare i la filla?
- (121) Fa 10 anys l'edat de la Montse era la meitat de l'edat que tindrà daquí a 20 anys. Quina és l'edat actual de la Montse?
- (122) L'edat d'un pare és el triple de la del seu fill i junts sumen 44 anys. Quina és l'edat de cada un?

- (123) Entre dos amics tenen 87 cromos. Si un en té el doble que l'altre, quants cromos tenen cada un?
- (124) En una competició d'atletisme hi ha el doble d'atletes dels EUA que d'Alemanya. Si en total hi ha 213 atletes, quants participants hi ha de cada un d'aquests dos països?

Exemple 6

Resoldrem la següent equació amb denominadors:

$$\frac{3x}{4} - 12 = 7 - \frac{x}{5}$$

Per fer-ho, primer haurem de calcular el mcm(4,5), el qual és 20. I multiplicarem tots els termes pel mcm, en aquest cas per 20:

$$\begin{aligned} \frac{20 \cdot 3x}{4} - 20 \cdot 12 &= 20 \cdot 7 - \frac{20 \cdot x}{5} \\ 5 \cdot 3x - 240 &= 140 - 4 \cdot x \\ 15x - 240 &= 140 - 4x \\ 15x + 4x &= 140 + 240 \\ 19x &= 380 \\ x &= \frac{380}{19} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

(125) $\frac{x}{2} = 5$

(126) $\frac{x}{3} = 4$

(127) $\frac{x}{3} = 5 - 2$

(128) $\frac{x}{4} = 8$

(129) $\frac{3x}{5} = 6$

(130) $\frac{x}{2} = 3 + 4$

(131) $\frac{x}{2} = 9$

(132) $\frac{x}{4} = 2$

(133) $\frac{x}{9} = 6$

(134) $\frac{2x}{4} = 6$

(135) $\frac{2x-5}{3} = 15$

(136) $\frac{3x+2}{4} = 5$

(137) $\frac{6+2x}{4} = 3$

(138) $\frac{3x+6}{3} = 5$

(139) $\frac{x}{2} = \frac{9}{6}$

(140) $\frac{2x}{3} = \frac{4}{9}$

(141) $\frac{3x}{4} = \frac{9}{6}$

(142) $\frac{2x-3}{5} - 7 = 0$

(143) $\frac{5x}{3} = \frac{60}{4}$

(144) $\frac{2-x}{2} = \frac{2x-3}{3}$

(145) $\frac{x}{3} + \frac{x}{7} = 20$

(146) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + \frac{11}{6}$

(147) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = 0$

(148) $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+3}{3}$

(149) $\frac{2x-1}{3} = \frac{4x+2}{5}$

(150) $\frac{x+11}{6} = \frac{x+5}{3}$

(151) $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-1}{6} = 4$

(152) $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$

(153) $\frac{x-2}{4} + \frac{3x-1}{8} = 4$

(154) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{5x}{12}$

$$(155) \quad \frac{4}{5} - 2x + \frac{3x}{2} = \frac{3}{4} - \frac{7x}{10}$$

$$(156) \quad \frac{1}{3} - \frac{x-2}{10} = \frac{3-2x}{15} - \frac{1}{6} + x$$

$$(157) \quad \frac{7x+8}{8} - \frac{9x-12}{16} = 1$$

$$(158) \quad \frac{4+x}{21} - \frac{5+3x}{14} = \frac{x+5}{6} - 1$$

$$(159) \quad \frac{1-2x}{2} + \frac{4-4x}{10} = \frac{2x-13}{10} - \frac{4x-3}{5}$$

$$(160) \quad \frac{x-2}{5} - \frac{2x+1}{3} + \frac{2x+6}{15} = 0$$

$$(161) \quad 4x - \frac{x+3}{4} - \frac{5(x+1)}{3} = \frac{3(x-2)}{2} - \frac{4(x+1)}{3}$$

$$(162) \quad \frac{2x-1}{3} - \frac{2-x}{2} = \frac{x+1}{5} + \frac{2}{5}$$

$$(163) \quad \frac{4x+3}{5} - \left(x - \frac{2x-2}{6}\right) = 4$$

$$(164) \quad 1 - \frac{2x-5}{40} = x - \frac{4x-7}{10} + \frac{x}{5}$$

$$(165) \quad 7x - 6 = 22$$

$$(166) \quad -2x + 10 = 20$$

$$(167) \quad 10 + 2x = -7x + 19$$

$$(168) \quad 13x - 21 = 12x - 24$$

$$(169) \quad 2(3x+1) = 7x-3$$

$$(170) \quad 120 = 2x - (15 - 7x)$$

$$(171) \quad 9(13-x) - 4x = 5(21-2x) + 9x$$

$$(172) \quad 5x = 8(5x-3) - 4$$

$$(173) \quad 3(x-7) - 6(3-2x) = 19 - 4(2x+3)$$

$$(174) \quad \frac{5x}{6} + \frac{2x}{3} = 9$$

$$(175) \quad \frac{3x}{5} + 7 = \frac{x}{3} + 9$$

$$(176) \quad 4 - \frac{x+3}{6} = 2 + \frac{9-2x}{3}$$

$$(177) \quad \frac{x+11}{2} + \frac{2x-7}{5} = -4$$

$$(178) \quad \frac{3x+5}{2} + \frac{4x-5}{5} = \frac{7x+1}{6} + 7$$

(179) En arribar 32 persones a una assemblea s'observa que ara el nombre d'assistents és igual al triple dels que hi havia menys 14. Quantes persones hi havia inicialment a l'assemblea?

(180) En una granja que fa agricultura ecològica, hi ha gallines i gats. Si tenim en total 38 caps i 108 potes, quants animals hi ha de cada classe?

(181) Tenim 30 xiclets. N'hi ha de maduixa i de menta. Quants de cada n'hem comprat si ens hem gastat 5€ i 40c i cada un de menta val 20c i el de maduixa 15c?

$$(182) \quad \frac{3(x-1)}{4} = 2 + \frac{x}{3} + \frac{5}{2}$$

$$(183) \quad \frac{4(3x+6)}{5} + 12 = \frac{3(2x+6)}{2} + 2x$$

$$(184) \quad \frac{2x+1}{3} = \frac{x-1}{5}$$

$$(185) \quad \frac{3}{x+4} = \frac{5}{x-4}$$

$$(186) \quad 2(2x-2(3x-2)) = 3x-3$$

$$(187) \quad \frac{x+3}{10} - \frac{x-1}{5} = \frac{x-21}{4} + \frac{4-x}{7}$$

$$(188) \quad 1 - \frac{2(x-1)}{3} - 5x = 3(1+2x) - 13$$

$$(189) \quad \frac{7+\frac{x}{2}}{3} + \frac{\frac{x}{5}+6}{4} = 6$$

$$(190) \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x}$$

$$(200) \quad \frac{\frac{x-3}{2} + 1}{\frac{2}{2}} + 3 = 6$$

$$(191) \quad \frac{x-3}{2} + \frac{x+4}{3} = 1$$

$$(192) \quad \frac{2x+3}{5} - \frac{x-1}{2} = \frac{x+3}{4}$$

$$(193) \quad \frac{x}{3} + \frac{x+3(x-2)}{5} = \frac{x-2(3-x)}{5}$$

$$(194) \quad 5 - (2 - 3(x-3) + 4x) - 3x + 5 = 3$$

$$(195) \quad 3(x+2) - 4(x-3) = 2(3x-1) - 3(2x-4)$$

$$(196) \quad \frac{9-x}{8} + \frac{5x+1}{6} = \frac{3x+7}{10} - \frac{1-6x}{5}$$

$$(197) \quad \frac{\frac{3x+1}{7} - 4}{3} + \frac{\frac{2-3x}{4} + 3}{2} = \frac{\frac{5x-1}{3} + 2}{5} - 1$$

$$(198) \quad 3(x+1) - 6(2x-4) = 7(1+x) - 2(3x-5)$$

$$(199) \quad 5 - 4(3(x+2) - 5(2x+1)) + 3 = x + 31$$

$$(201) \quad 3x - \left(\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x-2}{2} \right) \right) - \frac{x-1}{3} \right) = 1 - \frac{x}{4}$$

$$(202) \quad \frac{3x - (2x-6) + 5}{3} - \frac{-4 - \frac{x+3}{7}}{5} - (x-7) = \frac{2 \left(\frac{4x-1}{3} + 2 \right)}{7} - \frac{5 - \left(\frac{x}{2} + 1 \right)}{3} - 7$$

2.2 Sistems d'equacions de 1^r grau

$$(203) \quad \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

$$(210) \quad \begin{cases} 20x - 23y = 212 \\ 19x - 21y = 198 \end{cases}$$

$$(217) \quad \begin{cases} 21x - 2y = 23 \\ 3(y - 47) = 6x + 3 \end{cases}$$

$$(204) \quad \begin{cases} 3x + 5y = -3 \\ 21x - 35y + 21 = 0 \end{cases}$$

$$(211) \quad \begin{cases} 20x - 25y = 0 \\ x - y = y - 15 \end{cases}$$

$$(218) \quad \begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 2(y + 4x) = 25 + 3x \end{cases}$$

$$(205) \quad \begin{cases} x - 1 = y \\ 2y = 10x - 82 \end{cases}$$

$$(212) \quad \begin{cases} 4x + 6y = -12 \\ 17x - 5y = 1474 \end{cases}$$

$$(219) \quad \begin{cases} 5(x - 2) = y + 2 \\ x - 23 = 3(y - 5) \end{cases}$$

$$(206) \quad \begin{cases} 21y + 20x = 143 \\ 77y - 30x = 218 \end{cases}$$

$$(213) \quad \begin{cases} x - 5y = -15x + 27 \\ x + 30 = y + 31 \end{cases}$$

$$(220) \quad \begin{cases} x + 49y = 741 \\ 49x + y = 309 \end{cases}$$

$$(207) \quad \begin{cases} x + y = 28 \\ 3x - 11y = 8y - 4 \end{cases}$$

$$(214) \quad \begin{cases} 9x - 8y = 1 \\ 12x - 10y = 2 \end{cases}$$

$$(221) \quad \begin{cases} 10x + 7y = -5 \\ 3x - 5y = 34 \end{cases}$$

$$(208) \quad \begin{cases} 3x - 2y = -15 \\ x + 7 = 2y + 14 \end{cases}$$

$$(215) \quad \begin{cases} 6x - y = y + 42 \\ 10y + x = 10x - 63 \end{cases}$$

$$(222) \quad \begin{cases} 12x + 11y = 1 \\ 3y - 2(x - 8) = 11 \end{cases}$$

$$(209) \quad \begin{cases} 28y - 27x = 7 \\ x + 6y = y + 42 \end{cases}$$

$$(216) \quad \begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ -3x + 8y = -4 \end{cases}$$

$$(223) \quad \begin{cases} 5x + 6y = 0 \\ 6y - (x - 3) = 75 \end{cases}$$

2.3 Equacions de 2ⁿ grau

$$(224) \quad 2x^2 + 2x - 60 = 0$$

$$(240) \quad 5x^2 - 3x + 2 = -3 - 9x + 4x^2$$

$$(256) \quad (x - 2)^2 = 9$$

$$(225) \quad x^2 - 15x + 56 = 0$$

$$(241) \quad 7x^2 - 2(x + 1) = 6x^2 - 3x + 10$$

$$(257) \quad (x - 4)^2 = -9$$

$$(226) \quad x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(242) \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(258) \quad (x + 3)^2 = 0$$

$$(227) \quad -5x^2 - 30x + 455 = 0$$

$$(243) \quad -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$(259) \quad (x - 3)^2 = 4$$

$$(228) \quad 3x^2 - 12x - 15 = 0$$

$$(244) \quad x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$(260) \quad 3x^2 - x = 0$$

$$(229) \quad 5x^2 - 10x - 15 = 0$$

$$(245) \quad x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(261) \quad \frac{x^2}{3} = -\frac{x}{5}$$

$$(230) \quad -2x^2 - 4x + 96 = 0$$

$$(246) \quad 3x^2 - 24x + 45 = 0$$

$$(262) \quad x^2 + x = 0$$

$$(231) \quad 2x^2 - 40x + 198 = 0$$

$$(247) \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(263) \quad 4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$(232) \quad -3x^2 + 21x - 30 = 0$$

$$(248) \quad 2x^2 = -2x + 4$$

$$(264) \quad \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$(233) \quad x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(249) \quad 3x = 10 - x^2$$

$$(265) \quad x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5} = 0$$

$$(234) \quad x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(250) \quad 2x^2 - 6 = 0$$

$$(266) \quad 3x^2 - 15x + 12 = 0$$

$$(235) \quad -25x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(251) \quad x^2 - 16 = 0$$

$$(267) \quad -15x = -56 - x^2$$

$$(236) \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(252) \quad 1 - 8x^2 = 0$$

$$(268) \quad 2x^2 - 16 = -4x$$

$$(237) \quad -3x^2 + 19x - 20 = 0$$

$$(253) \quad (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$(269) \quad 12 = -7x - x^2$$

$$(238) \quad 15x^2 + 16x - 15 = 0$$

$$(254) \quad \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$(270) \quad -4x^2 + 100 = 0$$

$$(239) \quad 200x^2 - 20x = 120 + 21x - 145x^2$$

$$(255) \quad \frac{x^2 - 1}{3} = 5$$

$$(271) \quad -10000 + x^2 = 0$$

$$(272) \quad -2 = -2x^2$$

$$(273) \quad -3x^2 = -243$$

(274) $3x^2 + 6x = 0$

(279) $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+2}{x+1}$

(283) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(275) $0 = -4x^2 - 88x$

(280) $2x^2 - 8 = 0$

(284) $-5x^2 - 5x + 150 = 0$

(276) $-11x^2 = 121x$

(281) $x^2 - 2x = 0$

(285) $-2x^2 - 2x + 12 = 0$

(277) $-4x = 36x^2$

(282) $2x^2 + 3 + 5x = x^2 + 3$

(286) $x(x-3) = 10$

(278) $(x-1)(x+2) = 0$

2.4 Equacions amb x al denominador

(287) $\frac{x+15}{x-1} = 15x$

(292) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{3x}{x+2} + 1 = 0$

(288) $\frac{1}{x} + 1 = \frac{5}{2x} - 4$

(293) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2x-1}{3x+1}$

(289) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$

(294) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-3}$

(290) $\frac{x-1}{x} + x = 1$

(295) $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$

(291) $\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$

(296) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$

2.5 Equacions Irracionals

(297) $\sqrt{x} = 10$

(317) $\sqrt{x+5} = 4\sqrt{x}$

(298) $\sqrt{x} = \frac{5}{2}$

(318) $\sqrt{5x-2} = 2\sqrt{x}$

(299) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

(319) $\sqrt{-5x+2} = 2 + \sqrt{4-x}$

(300) $\sqrt{x} = -4$

(320) $\frac{1}{2}\sqrt{-2-5x} - 2 = \frac{2}{3}\sqrt{2-3x} - 2$

(301) $\sqrt{x} = 0$

(321) $\sqrt{x^2-16} = x-2$

(302) $\sqrt{x} - 3 = 5$

(322) $\sqrt{x^2+4} = x+2$

(303) $\sqrt{2x} = 1$

(323) $\sqrt{x^2-1} = x-1$

(304) $\sqrt{2x} = \frac{1}{2}$

(324) $\sqrt{4x^2+5} = 2x-1$

(305) $\sqrt{-x} = 3$

(325) $2\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x} - 2x - 1 = 0$

(306) $-\sqrt{x} = -3$

(326) $2\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x} + 2x + 1 = 0$

(307) $\sqrt{2x-3} - 5 = 0$

(327) $\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x}$

(308) $\sqrt{2x+3} + 5 = 0$

(328) $\sqrt{4x+5} = 5 - 2\sqrt{x}$

(309) $3 - \sqrt{5x+2} = 7$

(329) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = 1$

(310) $\sqrt{\frac{x}{2}-6} + 5 = 2$

(330) $\sqrt{x+5} = \sqrt{x+12} - 1$

(311) $\sqrt{2-3x} + \frac{1}{2} = 8$

(331) $\sqrt{5x-6} - 2 = \sqrt{x-2}$

(312) $\sqrt{2-3x} - 5 = 0$

(332) $3 - \sqrt{x} + \sqrt{x-21} = 0$

(313) $3\sqrt{4x-5} = 12$

(333) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x-1}$

(314) $1 = 2\sqrt{\frac{x}{3}} - 5$

(334) $\sqrt{x+7} - \sqrt{4x+5} = \sqrt{x}$

(315) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x}$

(335) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4x+1} + \sqrt{9x+4}$

(316) $\sqrt{-4x+3} = \sqrt{x}$

(336) $\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+2} = \sqrt{9x-1}$

(337) $\sqrt{9x+9} - \sqrt{x+3} - \sqrt{4x+2} = 0$

(340) $\sqrt{27x+2} - \sqrt{12x+7} = \sqrt{3x+1}$

(338) $\sqrt{25x+1} = \sqrt{4x+2} + \sqrt{9x-1}$

(341) $\sqrt{5x+2} = \sqrt{5x+3} + \sqrt{20x-3}$

(339) $\sqrt{27x+2} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{12x+1}$

(342) $\sqrt{45x-1} - \sqrt{5x-2} - \sqrt{20x+3} = 0$

2.6 Equacions Biquadrades

(343) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

(349) $3x^4 + x^2 - 2 = 0$

(355) $x^2(x^2 - 2) = 8$

(344) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

(350) $x^4 = 10x^2 - 25$

(356) $x^2(x^2 + 3) = 10$

(345) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

(351) $2x^4 + 6 = 8x^2$

(357) $x^2(x^2 - 8) + 15 = 0$

(346) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

(352) $2x^4 - 4x^2 - 2 = 0$

(358) $\frac{x^4 + 16}{x^2} = 13$

(347) $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$

(353) $(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2$

(348) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

(354) $x^4 - 9 = 0$

(359) $x^2(x^2 - 2) + 2 = x^2$

2.7 Sistemes d'Equacions de Segon Ordre

(360) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x^2 - y^2 = 17 \end{cases}$

(365) $\begin{cases} xy = 20 \\ \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$

(370) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

(361) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

(366) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 5xy = 25 \end{cases}$

(371) $\begin{cases} (2x - 1)^2 - 3x(2y + 3) = -21 \\ x + y = 3 \end{cases}$

(362) $\begin{cases} y - x = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

(367) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ (x - y)^2 + 2x - 3y = 26 \end{cases}$

(372) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$

(363) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + 4xy = 57 \end{cases}$

(368) $\begin{cases} x - y = 2 \\ (x - 2)^2 + 3y = 18 \end{cases}$

(373) $\begin{cases} x - y = 9 \\ x \cdot y = 90 \end{cases}$

(364) $\begin{cases} x^2 - xy = 14 \\ x^2 + xy = -6 \end{cases}$

(369) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x + y = 4 \end{cases}$

(374) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ 2x^2 - y^2 = 49 \end{cases}$

2.8 Sistemes de 3 Equacions amb 3 incògnites

(375) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - z = -2 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$

(380) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$

(385) $\begin{cases} 2y + 3x + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

(376) $\begin{cases} z - y = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

(381) $\begin{cases} x + 3y - 3z = 23 \\ -x + 4y + 2z = 8 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

(386) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

(377) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 3 \\ z - y + x = 2 \end{cases}$

(382) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -x - y + 3z = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

(387) $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 3x - 3y + z = -1 \end{cases}$

(378) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{cases}$

(383) $\begin{cases} x + 4z = 1 \\ y - z = 4 \\ -x - 2y - z = -9 \end{cases}$

(379) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$

(384) $\begin{cases} -y + 4z = 9 \\ y + z = 1 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases}$

2.9 Inequacions

$$(388) \quad \frac{3x-1}{2} - \frac{x-1}{3} < 2x-1$$

$$(389) \quad 4x+9-2(3x-5) \geq \frac{x+1}{3} - 1$$

$$(390) \quad \frac{x-9}{5} - \frac{5x-13}{15} \leq \frac{4x}{3} + 10$$

$$(391) \quad (3x+1)^2 - 5x^2 + 2x \leq (2x-1)^2$$

$$(392) \quad \frac{5-2x}{3x-9} < 1$$

$$(393) \quad \frac{x-5}{x} + 5 \geq x$$

$$(394) \quad \frac{x-1}{x+1} > \frac{x+1}{x-1}$$

$$(395) \quad (x-3)(x+2) \geq 0$$

$$(396) \quad (x-6)(x^2+1) < 0$$

$$(397) \quad (2x-1)(3x+5) \leq 0$$

$$(398) \quad x(3x-1)(x+2) < 0$$

$$(399) \quad x^2 - 4 < 0$$

$$(400) \quad x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$(401) \quad x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

$$(402) \quad -6x^2 - x + 1 > 0$$

$$(403) \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

$$(404) \quad x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$$

$$(405) \quad \frac{3x-1}{2x+5} \leq 0$$

$$(406) \quad \frac{3x-1}{2x+5} \geq 0$$

$$(407) \quad \frac{2x}{x^2+1} < 0$$

$$(408) \quad \frac{25}{x^2-1} \leq 0$$

$$(409) \quad \frac{x^2-6}{2x+3} < 0$$

$$(410) \quad \frac{x^2-8x+15}{x^2-4} < 0$$

$$(411) \quad \begin{cases} 2-4x < 8 \\ 7x+2 > 2x-1 \end{cases}$$

$$(412) \quad \begin{cases} x^2 \leq 6x+7 \\ 2x-3 < 4 \end{cases}$$

$$(413) \quad \begin{cases} 2x^2-3x > 5 \\ x-1 < 3x+2 \end{cases}$$

$$(414) \quad \begin{cases} 3-2x \geq 7x+12 \\ 2x+3 < 3x-15 \end{cases}$$

$$(415) \quad \begin{cases} 4-3(x-1) > 2x-3 \\ 3(x-1)+1 \geq -5 \end{cases}$$

$$(416) \quad \begin{cases} \frac{2x-11}{3} - \frac{x+1}{6} \leq 0 \\ \frac{4x+6}{5} \leq \frac{7x}{10} + \frac{x+7}{2} \end{cases}$$

$$(417) \quad \begin{cases} 9x(x+3)-1 \leq 5+(3x-1)^2 \\ 6(x+13) \leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

2.10 Solucions

$$(1) \quad 11m$$

$$(12) \quad x = \frac{-64}{9}$$

$$(23) \quad x = 44$$

$$(34) \quad x = 4$$

$$(2) \quad x = 37 \text{ i } x = 73$$

$$(13) \quad x = \frac{15}{7}$$

$$(24) \quad x = 54$$

$$(35) \quad x = 7$$

$$(3) \quad x = 6$$

$$(14) \quad x = 8$$

$$(25) \quad 27m$$

$$(36) \quad x = 2$$

$$(4) \quad x = -3$$

$$(15) \quad x = 9$$

$$(26) \quad x = 8$$

$$(37) \quad x = \frac{1}{7}$$

$$(5) \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(16) \quad x = 5$$

$$(27) \quad x = 3$$

$$(38) \quad x = 3$$

$$(6) \quad x = \frac{-2}{3}$$

$$(17) \quad x = -4$$

$$(28) \quad x = 16$$

$$(39) \quad x = 64$$

$$(7) \quad x = \frac{3}{2}$$

$$(18) \quad x = -4$$

$$(29) \quad x = 2$$

$$(40) \quad x = 5$$

$$(8) \quad x = \frac{-5}{3}$$

$$(19) \quad x = 35$$

$$(30) \quad x = 3$$

$$(41) \quad x = -44$$

$$(9) \quad x = -3$$

$$(20) \quad 62\in$$

$$(31) \quad x = 10$$

$$(42) \quad x = 3$$

$$(10) \quad x = \frac{5}{3}$$

$$(21) \quad x = 12$$

$$(32) \quad x = 3$$

$$(43) \quad x = 17$$

$$(11) \quad x = \frac{3}{5}$$

$$(22) \quad x = 26$$

$$(33) \quad x = \frac{3}{2}$$

$$(44) \quad x = 1$$

- (45) $x = -14$ (46) $x = \frac{-1}{3}$ (47) $x = \frac{1}{2}$ (48) $x = 6$ (49) $x = \frac{28}{3}$ (50) $x = 2$ (51) $x = \frac{-1}{2}$ (52) $x = 5$ (53) $x = 2$ (54) 50€ (55) $x = 33$ (56) $x = 45$ (57) $x = 4$ (58) $x = 25$ (59) 18 conills (60) $x = 8$ (61) $x = 118$ (62) $x = 12$ (63) $x = 24$ (64) $x = 4$ (65) $x = 9$ (66) 37cm (67) 40cm i 10cm (68) $x = 2$ (69) $x = 450$ (70) $x = 5$ (71) $x = 21$ (72) $x = 5$ (73) $x = 28$ (74) $x = 6$ (75) $x = 1$ (76) $x = 2$ (77) $x = 5$ (78) $x = 0$ (79) $x = \frac{23}{3}$ (80) $x = 2$
- (81) $x = \frac{-5}{3}$ (82) $x = \frac{9}{5}$ (83) $x = \frac{8}{3}$ (84) $x = 3$ (85) $x = -2$ (86) $x = 1$ (87) $x = 3$ (88) $x = 2$ (89) $x = 7$ (90) $x = 3$ (91) $x = 7$ (92) $x = 1$ (93) $x = 2$ (94) 680€ (95) $x = 54$ (96) 18 anys (97) $x = 56$ (98) $x = 54$ (99) (a) $x = -3$ (b) $x = 2$ (c) $x = 1$ (d) $x = -6$ (e) $x = 1$
- (100) (a) $x = 4$ (b) $x = 252$ (101) $x = 3$ (102) 35 nois i 48 noies (103) 36 nois i 41 noies (104) 13cm i 26cm (105) 8cm i 5cm (106) 40, 48 i 64 adhesius (107) 15€ (108) 32 i 28 (109) 132, 133 i 134 (110) 14 qüestions (111) 9 de 5€ i 3 de 2€
- (112) 24 dromedaris i 62 camells (113) 40 i 30 (114) 360€ i 240€ (115) 30, 33, 36 i 39 anys (116) 11 i 14 anys (117) 28 anys (118) Fa 3 anys (119) La Cristina 60 anys i en Jordi 20 anys (120) 65 i 40 anys (121) 40 anys (122) 11 i 33 anys (123) 29 i 58 cromos (124) 142 d'Estats Units i 71 Alemanys (125) $x = 10$ (126) $x = 12$ (127) $x = 9$ (128) $x = 32$ (129) $x = 10$ (130) $x = 14$ (131) $x = 18$ (132) $x = 8$ (133) $x = 54$ (134) $x = 12$ (135) $x = 25$ (136) $x = 6$ (137) $x = 3$ (138) $x = 3$ (139) $x = 3$ (140) $x = \frac{2}{3}$ (141) $x = 2$ (142) $x = 19$ (143) $x = 9$ (144) $x = \frac{12}{7}$
- (145) $x = 42$ (146) $x = 55$ (147) $x = 11$ (148) $x = 9$ (149) $x = \frac{-11}{2}$ (150) $x = 1$ (151) $x = \frac{34}{5}$ (152) $x = 5$ (153) $x = \frac{37}{5}$ (154) $x = \frac{-15}{11}$ (155) $x = \frac{-1}{4}$ (156) $x = \frac{15}{29}$ (157) $x = \frac{-12}{5}$ (158) $x = 0$ (159) $x = 2$ (160) $x = -1$ (161) $x = -1$ (162) $x = 2$ (163) $x = 28$ (164) $x = \frac{1}{2}$ (165) $x = 4$ (166) $x = -5$ (167) $x = 1$ (168) $x = -3$ (169) $x = 5$ (170) $x = 15$ (171) $x = 1$ (172) $x = \frac{4}{5}$ (173) $x = 2$ (174) $x = 6$ (175) $x = \frac{15}{2}$ (176) $x = 3$ (177) $x = -9$ (178) $x = 5$ (179) 23 persones (180) 22 gallines i 16 gats (181) 12 de maduixa i 18 de menta (182) $x = \frac{63}{5}$

- (183) $x = 3$ (219) $x = 2, y = -2$ (255) $x = -4, x = 4$ (291) No té solució $\mathbb{R}$
 (184) $x = \frac{-8}{7}$ (220) $x = 6, y = 15$ (256) $x = -1, x = 5$ (292) $x = 1, -\frac{2}{5}$
 (185) $x = -16$ (221) $x = 3, y = -5$ (257) No té solució real (293) $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
 (186) $x = 1$ (222) $x = 1, y = -1$ (258) $x = -3$ (294) $x = -\frac{3}{2}$
 (187) $x = 25$ (223) $x = -12, y = 10$ (259) $x = 1, x = 5$ (295) $x = \pm 2$
 (188) $x = 1$ (224) $x = 5, x = -6$ (260) $x = 0, x = \frac{1}{3}$ (296) $x = 3$
 (189) $x = 10$ (225) $x = 7, x = 8$ (261) $x = 0, x = -\frac{3}{5}$ (297) $x = 100$
 (190) $x = 2$ (226) $x = 6, x = -9$ (262) $x = -1, x = 0$ (298) $x = \frac{25}{4}$
 (191) $x = \frac{7}{5}$ (227) $x = 7, x = -13$ (263) $x = -3, x = 1$ (299) $x = \frac{1}{4}$
 (192) $x = 1$ (228) $x = -1, x = 5$ (264) $x = -2, x = 6$ (300) No té solució $\mathbb{R}$
 (193) $x = 0$ (229) $x = 3, x = -1$ (265) $x = \frac{2}{5}, x = 2$ (301) $x = 0$
 (194) $x = -1$ (230) $x = 6, x = -8$ (266) $x = 1, x = 4$ (302) $x = 64$
 (195) $x = 8$ (231) $x = 9, x = 11$ (267) $x = 7, x = 8$ (303) $x = \frac{1}{2}$
 (196) $x = 1$ (232) $x = 2, x = 5$ (268) $x = -4, x = 2$ (304) $x = \frac{1}{8}$
 (197) $x = 2$ (233) $x = 1, x = -8$ (269) $x = -4, x = -3$ (305) $x = -9$
 (198) $x = 1$ (234) $x = 3, x = -9$ (270) $x = -5, x = 5$ (306) $x = 9$
 (199) $x = 1$ (235) $x = \frac{3}{5}, x = \frac{-2}{5}$ (271) $x = -100, x = 100$ (307) $x = 14$
 (200) $x = 5$ (236) $x = \frac{3}{2}, x = -1$ (272) $x = -1, x = 1$ (308) No té solució $\mathbb{R}$
 (201) $x = \frac{10}{19}$ (237) $x = \frac{4}{3}, x = 5$ (273) $x = -9, x = 9$ (309) No té solució $\mathbb{R}$
 (202) $x = 4$ (238) $x = \frac{3}{5}, x = \frac{-5}{3}$ (274) $x = -2, x = 0$ (310) No té solució $\mathbb{R}$
 (203) $x = 8, y = 2$ (239) $x = \frac{15}{23}, x = \frac{-16}{30}$ (275) $x = -22, x = 0$ (311) $x = -\frac{217}{12}$
 (204) $x = 9, y = -6$ (240) $x = -5, x = -1$ (276) $x = -11, x = 0$ (312) $x = -\frac{23}{3}$
 (205) $x = 10, y = 9$ (241) $x = 3, x = -4$ (277) $x = -\frac{1}{9}, x = 0$ (313) $x = \frac{21}{4}$
 (206) $x = 3, y = 4$ (242) $x = -3, x = 5$ (278) $x = 1, x = -2$ (314) $x = 27$
 (207) $x = 24, y = 4$ (243) $x = -\frac{1}{2}, x = 1$ (279) $x = -\frac{3}{2}$ (315) $x = 1$
 (208) $x = -11, y = -9$ (244) $x = -7, x = -3$ (280) $x = 2, x = -2$ (316) $x = \frac{3}{5}$
 (209) $x = 7, y = 7$ (245) $x = -1 \pm \sqrt{13}$ (281) $x = 0, x = 2$ (317) $x = \frac{1}{3}$
 (210) $x = 6, y = -4$ (246) $x = 3, x = 5$ (282) $x = -5, x = 0$ (318) $x = 2$
 (211) $x = 25, y = 20$ (247) $x = 4, x = -6$ (283) $x = 1, x = -3$ (319) $x = -1$
 (212) $x = 72, y = -50$ (248) $x = -2, x = 1$ (284) $x = 5, x = -6$ (320) $x = \frac{50}{3}$
 (213) $x = 2, y = 1$ (249) $x = 2, x = -5$ (285) $x = 2, x = -3$ (321) $x = 5$
 (214) $x = 1, y = 1$ (250) $x = \pm\sqrt{3}$ (286) $x = 5, x = -2$ (322) $x = 0$
 (215) $x = 7, y = 0$ (251) $x = -4, x = 4$ (287) $x = -\frac{3}{5}, \frac{5}{3}$ (323) $x = 1$
 (216) $x = 12, y = 4$ (252) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ (288) $x = \frac{3}{10}$ (324) No té solució $\mathbb{R}$
 (217) $x = 7, y = 62$ (253) $x = -2, x = 3$ (289) $x = 2, -5$ (325) $x = -\frac{1}{6}$
 (218) $x = 7, y = -5$ (254) $x = \frac{\pm 5}{\sqrt{6}}$ (290) $x = \pm 1$ (326) No té solució $\mathbb{R}$
 (327) $x = 4$
 (328) $x = 1$
 (329) $x = \frac{1}{4}$

- (330) $x = 4$ (347) $x = \pm 2,$
 $x = \pm\sqrt{2}$ (364) $x = 2, y = -5$ (376) $x = 1, y = 1,$
 $x = -2, y = 5$ $z = 1$
- (331) $x = 2, 3$ (348) $x = \pm 1,$
 $x = \pm\sqrt{2}$ (365) $x = 10, y = 2$ (377) $x = 3, y = 2,$
 $x = -10, y = -2$ $z = 1$
- (332) $x = 25$ (349) $x = \pm\sqrt{5}$ (366) $x = -1, y = 3$ (378) $x = 1, y = 2,$
 $x = 3, y = -1$ $z = 4$
- (333) No té solució $\mathbb{R}$ (350) $x = \pm 1$ (367) $x = 2, y = -2$ (379) $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3},$
 $x = -\frac{56}{25}, y = \frac{109}{25}$ $z = \frac{2}{3}$
- (334) $x = \frac{1}{9}$ (351) $x = \pm\sqrt{5}$ (368) $x = 5, y = 3$ (380) $x = 6, y = \frac{25}{2},$
 $x = -4, y = -6$ $z = -17$
- (335) $x = -\frac{4}{25}$ (352) $x = \pm 1$ (369) $x = 4, y = 0$ (381) $x = 2, y = -4,$
 $x = 0, y = 4$ $z = -3$
- (336) $x = \frac{3}{26}$ (353) $x = 0, x = -2$ (370) $x = 2, y = 1$ (382) $x = -4, y = 2,$
 $x = 1, y = \frac{2}{3}$ $z = -1$
- (337) $x = -\frac{1}{3}$ (354) $x = \pm\sqrt{3}$ (371) $x = 2, y = 1$ (383) $x = 1, y = 4,$
 $x = \frac{11}{10}, y = \frac{19}{10}$ $z = 0$
- (338) $x = \frac{1}{7}$ (355) $x = \pm 2$ (372) $x = 6, y = 8$ (384) $x = -4, y = -1,$
 $x = 8, y = 6$ $z = 2$
- (339) No té solució $\mathbb{R}$ (356) $x = \pm\sqrt{2}$ (373) $x = 15, y = 6$ (385) $x = \frac{3}{2}, y = -2,$
 $x = -6, y = -15$ $z = \frac{1}{2}$
- (340) No té solució $\mathbb{R}$ (357) $x = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ (374) $x = \pm 5, y = \pm 1$ (386) $x = 1, y = -2,$
 $z = 3$
- (341) No té solució $\mathbb{R}$ (358) $x = \pm 2, \pm 3$ (375) $x = 1, y = 3,$ (387) $x = \frac{1}{4}, y = \frac{13}{14},$
 $x = \frac{19}{7}, y = \frac{32}{7}$ $z = \frac{3}{2}$
- (342) $x = -\frac{7}{5}$ (359) $x = \pm 1, \pm\sqrt{2}$
- (343) $x = \pm\sqrt{3}$ (360) $x = \pm 3, y = \pm 1$
- (344) $x = \pm 1,$
 $x = \pm\sqrt{2}$ (361) $x = 5, y = 2$
 $x = 2, y = 5$
- (345) $x = \pm 3,$
 $x = \pm\sqrt{2}$ (362) $x = 2, y = 3$
 $x = -3, y = -2$
- (346) $x = \pm 1,$
 $x = \pm\sqrt{3}$ (363) $x = 3, y = 4$
 $x = \frac{19}{7}, y = \frac{32}{7}$

- (388) $(1, +\infty)$ (398) $(-\infty, -2) \cup (0, \frac{1}{3})$ (408) $(-1, 1)$
- (389) $(-\infty, \frac{59}{7})$ (399) $(-2, 2)$ (409) $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-\frac{3}{2}, \sqrt{6})$
- (390) $[-\frac{82}{11}, +\infty)$ (400) $(2, 4)$ (410) $(-2, 2) \cup (3, 5)$
- (391) $(-\infty, 0]$ (401) $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$ (411) $(-\frac{3}{5}, +\infty)$
- (392) $(-\infty, \frac{14}{5}) \cup (3, +\infty)$ (402) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ (412) $[-1, \frac{7}{2})$
- (393) $(-\infty, 0) \cup [1, 5]$ (403) $[1, 2] \cup [3, +\infty)$ (413) $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (\frac{5}{2}, +\infty)$
- (394) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (404) $(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$ (414) $\emptyset$
- (395) $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ (405) $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}]$ (415) $[-1, 2)$
- (396) $(-\infty, 6)$ (406) $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ (416) $[-\frac{23}{4}, \frac{23}{3}]$
- (397) $[-\frac{5}{3}, \frac{1}{2}]$ (407) $(-\infty, 0)$ (417) $(-\infty, -\frac{463}{35})$

Capítol 3

Combinatòria

3.1 Variacions

3.1.1 Variacions amb repetició

Tenim m boles numerades en una urna. Traiem una bola de l'urna, apuntem el seu número i la tornem a posar dins de l'urna (reposició). I repetim l'experiment n vegades. Per poder-ho expressar escrivim:

$$VR_{m,n} = m^n$$

I es llegeix com variacions amb repetició d' m elements agrupats d' n en m .

3.1.2 Variacions sense repetició

Tenim m boles numerades en una urna. Traiem una bola de l'urna, apuntem el seu número però **no** la tornem a posar dins de l'urna (sense reposició). I repetim l'experiment n vegades. Per poder-ho expressar escrivim:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)$$

I es llegeix com variacions d' m elements agrupats d' n en n .

- (1) Quants nombres de sis xifres es poden escriure amb les xifres senars ? Exemples : 735951, 311593,...
- (2) Arriben sis clients a un hotel i hi ha 4 habitacions lliures. De quantes maneres es poden distribuir si cada client vol una habitació per a ell sol?
- (3) En la cursa dels 1500 metres, hi participen 7 corredors. De quantes maneres diferents es poden repartir les tres medalles ?
- (4) Quaranta persones compren números en una tómbola en la que es rifen 5 premis. De quantes maneres es poden repartir?
- (5) En un examen tipus test de 20 preguntes, cada pregunta té cinc possibles respostes (a , b , c , d , e). Un estudiant que no sap res del tema ha decidit respondre a l'atzar. De quantes maneres pot fer-ho?
- (6) Quants "capicues" de 5 xifres es poden formar amb les 9 xifres significatives, sabent que les xifres es poden repetir?
- (7) Una línia de tren té 8 estacions. Si a cada bitllet hi ha el nom de l'estació de sortida i el de la d'arribada, quants bitllets de tren diferents hi ha?
- (8) Una empresa disposa de 3 llocs de treball diferents per omplir amb 7 candidats. De quantes maneres pot repartir-los?

- (9) Un pare té cinc fills i cada trimestre reparteix 3 premis: Un al millor estudiant, l'altre al que fa millor les feines de casa i l'últim al millor esportista. De quantes maneres pot repartir-los?
- (10) Calcula quantes variacions amb repetició podem fer amb les lletres a , b , c agafades de dos en dos.
- (11) Es tira una moneda enlaire i s'observa si ha sortit cara o creu. Es repeteix la tirada quatre vegades. Quants resultats diferents es poden obtenir?
- (12) Volem formar nombres de 4 xifres amb les xifres 2, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Quants se'n podran formar?
- (13) A la lliga de futbol de primera divisió hi participen 20 equips. Quants partits es juguen en tota la competició?
- (14) Es tiren tres daus de colors diferents. Quants resultats diferents se'n poden obtenir?
- (15) Forma totes les combinacions de lletres a , b , c , d , e agafades de 3 en 3.
- (16) Quants nombres hi ha compresos entre 1000 i 10000 en els quals només figurin les xifres 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Fes-ho amb repetició i sense repetició.
- (17) En un edifici hi ha 18 habitatges i cal escollir una persona per a la presidència i una altra per a la vicepresidència de la comunitat de veïns. Quantes eleccions diferents es poden fer?
- (18) En un concurs musical s'hi presenten 15 concursants. Hi ha tres premis per repartir: Millor interpretació, millor composició i millor vestuari. De quantes maneres poden quedar distribuïts els premis? (Una mateixa persona no pot obtenir més d'un premi)
- (19) De quantes maneres diferents pots treure dues cartes d'un joc de 48? Quina és la probabilitat que les dues siguin d'oros?

3.2 Permutacions

3.2.1 Permutacions amb Repetició

Diem permutacions amb repetició de m elements, als grups que poden formar-se amb els m elements, dels quals n'hi ha que estan repetits un cert número de vegades.

En general la fórmula per trobar el número de permutacions amb repetició d' n elements on hi ha grups repetits d' a , b , c , ... elements és :

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

3.2.2 Permutacions Circulars

Podem plantejar el problema d'ordenar una sèrie d'objectes en forma circular, de manera que dues ordenacions es consideren iguals si cada objecte en les dues ordenacions està precedit i seguit pels mateixos objectes. En aquest cas, podem pensar que, fixat un dels objectes, només cal col·locar els altres $n - 1$.

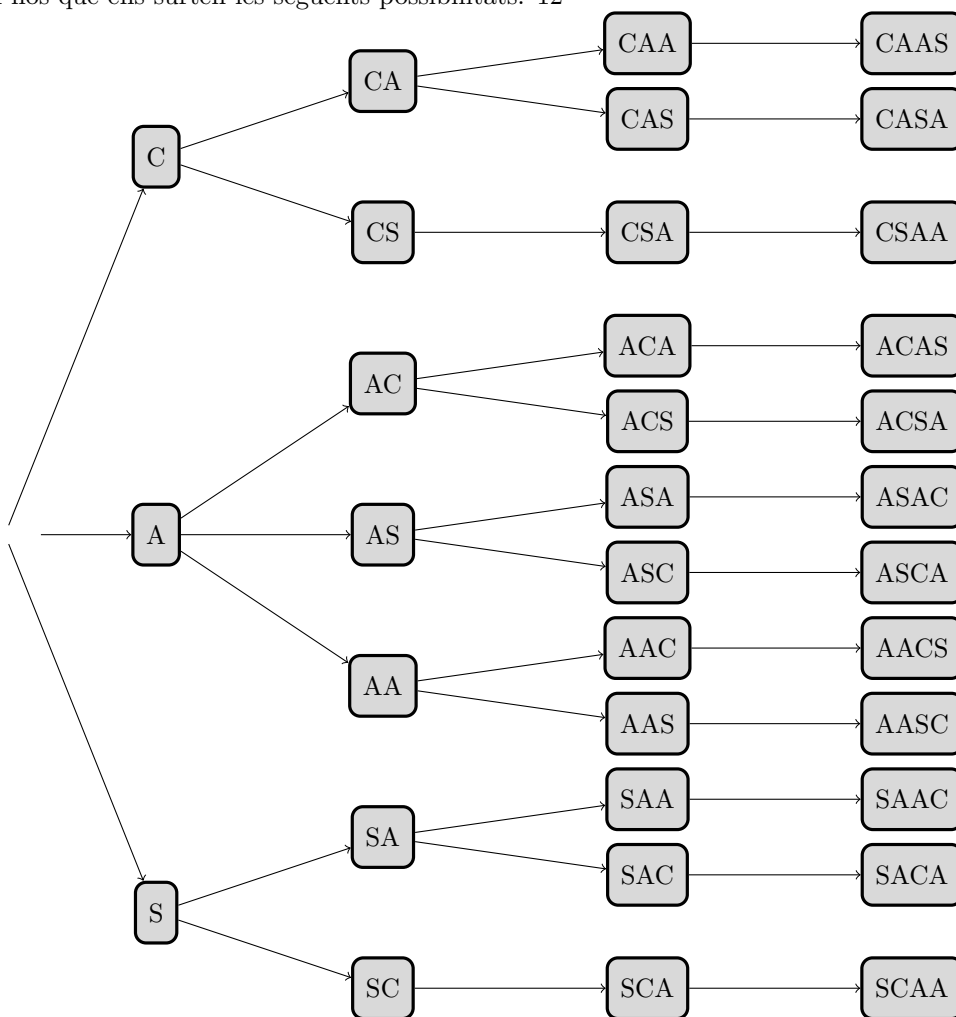
Per tant, el nombre d'ordenacions possibles són les permutacions circulars:

$$PC_n = (n - 1)!$$

Exemple: De quantes maneres es poden col·locar 4 persones per jugar a la botifarra? S'han de seure al voltant d'una taula, llavors serà:

$$PC_4 = (4 - 1)! = 3! = 6$$

Exemple: Amb les lletres de la paraula “CASA”. Quantes ordenacions diferents podem escriure? Fixem-nos que ens surten les següents possibilitats: 12



- (20) De quantes maneres diferents es poden asseure 4 persones en un banc ?
- (21) En una competició hi participen set persones. Quantes classificacions diferents es poden obtenir?
- (22) De quantes maneres es poden asseure cinc persones en una fila de cinc cadires?
- (23) Quantes paraules diferents es poden formar amb les lletres de la paraula "MATEMÀTICA"?
- (24) Quantes paraules podem formar amb les lletres de ABRACADABRA?
- (25) En un plató de televisió, es pretén col·locar 5 persones al voltant d'una taula rodona per fer un programa de tertúlia. De quantes maneres diferents podem fer-ho?
- (26) De quantes maneres puc col·locar 7 objectes en una estanteria si 3 són repetits?
- (27) Quedem 6 amics per sopar a un restaurant. De quantes maneres diferents podem seure al voltant de la taula?
- (28) Forma tots els números de 6 xifres amb les xifres 2, 4, 6, 7, 8, 9 de manera que entrin totes en cada número i no se'n repeteixi cap. Quantes d'aquests números tindran el 7 com a xifra de les centenes?
- (29) Quants números podem escriure amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5 de manera que entrin totes en cada número i no se'n repeteixi cap. Quants d'aquests números són més petits que 54000?
- (30) De quantes maneres puc col·locar 10 llibres en una estanteria?
- (31) De quantes maneres es pot escriure la paraula ESPRIU de manera que com a primera lletra tingui sempre la E i com a última la U?

3.3 Combinacions

Tenim n boles numerades en una urna. D'una grapada traiem k boles (evidentment $k \leq n$). Considerem que les boles no estan ordenades, és a dir, dos resultats són iguals si els números de les boles són els mateixos, sense importar el seu ordre. Tots els resultats possibles de l'experiment són :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Combinacions de n elements agafats de k en k .

3.3.1 Combinacions amb repetició

Tenim k urnes, cada una d'elles amb n boles numerades. Traiem una bola de cada urna. Considerem que dues extraccions són iguals si tenen el mateix nombre de boles amb el mateix número. Resultat: Tots els resultats possibles de l'experiment són :

$$CR_n = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

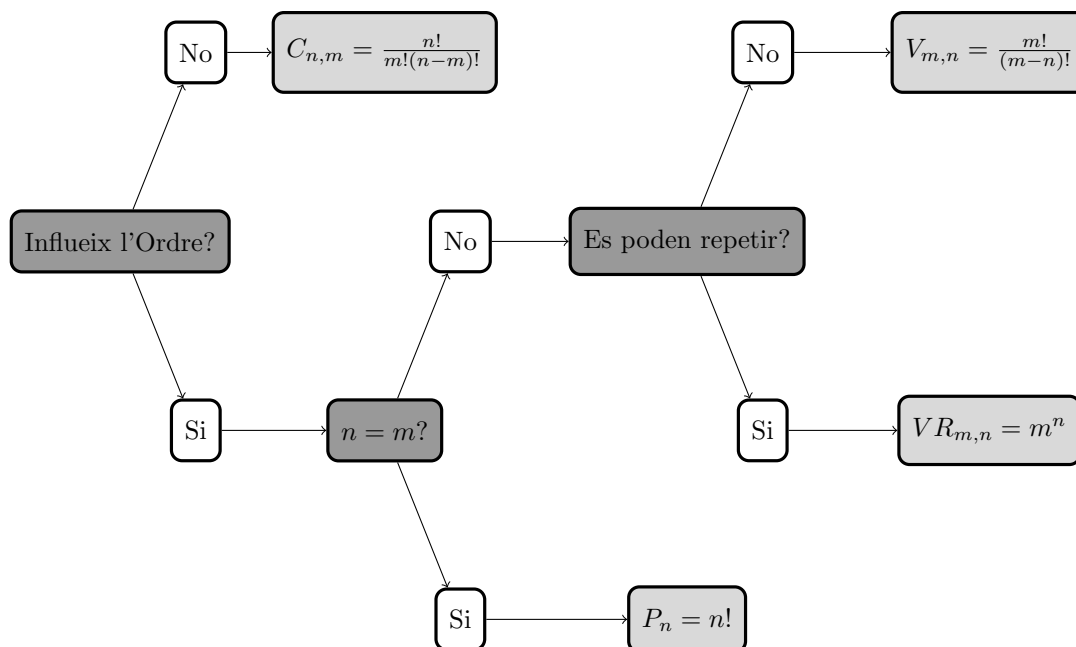
Combinacions amb repetició de n elements agafats de k en k .

- (33) Una companyia de comedians té en la seva llista 40 membres. Durant quants dies poden escollir un grup diferent de 6 comedians, si cada dia es forma un grup?
- (34) Amb 10 colors quantes barreges podem fer agafant 3 colors cada vegada?
- (35) Un barman disposa de sis begudes per fer combinats. Si en cada combinat hi posa 3 begudes, quines combinacions pot fer amb les begudes: anís, conyac, calisay, suc de taronja, ratafia, tònica ?
- (36) Calcula combinacions de 6 elements agafats de dos en dos i comprova que et dona el mateix resultat que combinacions de 6 elements agafats de quatre en quatre.
- (37) Una comissió ha de constar de 2 professors i 4 alumnes. Quantes comissions es podran formar amb 7 professors i 10 alumnes per escollir?
- (38) En una habitació hi ha 6 llums, però amb 3 n'hi ha prou per tenir-la ben il·luminada. Quantes combinacions es poden fer?
- (39) Un equip de treball està format per 9 alumnes. Han d'anar tres d'aquests alumnes a parlar amb el professor i volen considerar totes les possibilitats. Quantes n'hi ha?
- (40) Un equip mèdic està format per 3 metges i 5 infermeres. Quants equips es podran preparar amb 7 metges i 5 infermeres per escollir?
- (41) Quants nombres de quatre xifres repetides o no, es poden formar amb els dígit: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? I si no es poguessin repetir les xifres quants nombres es podrien fer? Quants d'aquests últims nombres són parells? I quants comencen per 35?
- (42) Quantes butlletes hem d'omplir per assegurar que encertarem els tres primers classificats en una cursa de set cavalls?
- (43) Amb tres vocals i tres consonants, quantes paraules de sis lletres es poden formar amb la condició de que no figurin dues consonants seguides? (considereu 5 vocals i 20 consonants)
- (44) Quantes ordenacions són possibles amb les lletres de la paraula INSUF?
- (45) La professora de Català presenta 8 novel·les diferents de les que s'han de triar 3 per llegir-les. Quantes opcions tens?
- (46) La professora de Català presenta 6 novel·les, 5 obres de teatre i 4 poesies, s'han de triar 3 novel·les, 3 obres teatrals i 2 poesies. Quantes opcions tens?

- (47) De quantes formes diferents es poden col·locar cinc persones en un banc de cinc places? I si el banc fos de set places?
- (48) El codi d'una llibreta de la Caixa té 4 xifres (del 0 al 9) quantes combinacions existeixen?
- (49) Quants subconjunts de dos elements té un conjunt de cinc elements? I si els subconjunts fossin de tres elements? I de quatre? I de cinc? I de zero elements? Quants subconjunts té un conjunt de cinc elements?
- (50) Imaginat ordenades de forma creixent tots el nombres resultants de les permutacions de les xifres 1, 2, 3, 4 i 5. Quin lloc ocupa en l'ordenació el nombre 25143?
- (51) De quantes formes diferents es poden col·locar 8 persones en una taula rodona?
- (52) Si en un sopar de 12 defensors de l'educació pública que tornen d'una manifestació, acorden no començar a fer el sopar fins que haguessin esgotat totes les formes possibles d'asseure a la taula, que et sembla, estarien encara ara sopant?
- (53) Quants collarets diferents es poden formar amb 20 boletes iguals, però que 15 són blanques i 5 negres, de forma que l'última boleta no toca a la primera?
- (54) En un pla hi ha 12 punts de forma que no n'hi ha tres que estiguin alineats, quantes rectes diferents es poden traçar de forma que passin per dos d'aquests punts?
- (55) De quantes formes es poden posar 5 anells diferents en els dits d'una mà?. Conte 4 dits, tots excepte el gran.
- (56) Disposem de cinc pesos diferents de: 10, 20, 50, 100 i 200 grams. Quantes pesades diferents es poden fer?
- (57) Amb cinc licors diferents quants 'coctels' diferents es poden fer? Entenent que un coctel ha de tenir un mínim de 2 licors.
- (58) Si disposem de 12 teles de colors diferents, quantes banderes diferents de tres franges horitzontals es poden fer?
- (59) De quantes formes es poden repartir 10 CDs diferents entre els 27 alumnes d'una classe de forma que com a màxim els toqui un CD per cap? I si els CDs són iguals?
- (60) En una reunió hi participen 14 francesos, 16 alemanys i 8 catalans. Es vol formar una comissió formada per 3 francesos, 4 alemanys i 2 catalans. Quantes comissions diferents es poden formar?
- (61) En un curs hi ha 10 assignatures. Les notes possibles per a cada assignatura són: Ex, Not, Bé, Suf, Ins i MD. Quantes qualificacions diferents pot obtenir?
- (62) Quants capicues es poden formar de 7 xifres?
- (63) Quantes matrícules diferents hi poden haver a tot l'estat? (recordeu 4 xifres i tres lletres entre 28 lletres)
- (64) Una persona té 8 pots de pintura de diferents colors, vol pintar les quatre parets i el sostre de la seva habitació d'un color diferent, de quantes formes ho pot fer? I si no calgués que els colors fossin diferents?
- (65) Les paraules de l'alfabet Morse estan composades de ral·les i punts. Quantes paraules diferents es poden fer amb 3 ral·les i 2 punts?
- (66) Un partit de futbol ha acabat amb el resultat 6 a 4. de quantes formes diferents es pot haver mogut el marcador per passar del 0 a 0 inicial fins el 6 a 4 final?
- (67) Una pissarra està dividida en cinc parts. Tres alumnes han de fer un exercici a una part de la pissarra. De quantes formes es poden col·locar?
- (68) En un pla hi ha dibuixades 25 rectes de manera que no hi ha cap parella paral·lela ni 3 rectes que es tallin en un sol punt. Quants punt d'intersecció hi ha?
- (69) De quantes formes 6 alumnes poden agafar un bolígraf d'un conjunt de 8 bolígrafs diferents?

- (70) Si tenim 6 pintures de diferents colors de quantes formes podem pintar 4 boles iguals? I si les boles fossin de diferent grandària?
- (71) Una habitació té 6 llums, es pot il·luminar l'habitació amb 0 llums encesos, amb 1 llum encès, amb dos llums encesos, etc. De quantes formes es pot il·luminar l'habitació?
- (72) Si el joc del domino arribés fins a 10 punts (del 0 al 10), quantes fitxes tindria?

3.4 Esquema



3.5 Solucions

- | | | | |
|---------------------------|-----------------|--------------------------|------------------------------------|
| (1) 15625 | (16) 1296 i 360 | (31) 24 | (46) 120 i 2.520 |
| (2) $V_6, 4 = 360$ | (17) 306 | (32) 3.838.380 | (47) 10.000 |
| (3) 210 | (18) 2730 | (33) 120 | (48) 10, 10, 5, 1, 1 i 32 |
| (4) 78.960.960 | (19) 2256 | (34) 20 | (49) 44 |
| (5) $9, 53 \cdot 10^{13}$ | (20) 24 | (35) 15 | (50) 5.040 |
| (6) 729 | (21) 5040 | (36) 4410 | (51) Sí |
| (7) 56 | (22) 120 | (37) 20 | (52) 15.504 |
| (8) 210 | (23) 453.600 | (38) 84 | (53) 66 |
| (9) 125 | (24) 83160 | (39) 35 | (54) 1024 |
| (10) 9 | (25) 24 | (40) 1296, 360, 180 i 12 | (55) 31 |
| (11) 16 | (26) 840 | (41) 210 | (56) 26 |
| (12) 2401 | (27) 144 | (42) 4 000 000 | (57) 1320 |
| (13) 380 | (28) 720, 120 | (43) 120 | (58) $\frac{27!}{17!}$ i 8.436.285 |
| (14) 216 | (29) 120, 114 | (44) 56 | (59) 18.549.440 |
| (15) 60 | (30) 362.8800 | (45) 1 200 | (60) 1.000.000 |

(61) 9000	(64) 10	(67) 2300	(70) 64
(62) 196.560.000	(65) 210	(68) 20160	
(63) 6720 i 32768	(66) 60	(69) 15, 360	(71) 66

Capítol 4

Polinomis

4.1 Monomis

S'anomena **monomi** l'expressió algebraica resultant de multiplicar diversos termes algebraics, com per exemple:

$$\boxed{a \cdot b = ab} \quad \boxed{x \cdot x \cdot y = x^2y} \quad \boxed{p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot r = pq^3r}$$

Un monomi pot tenir també un nombre multiplicat, el **coeficient**. El coeficient s'acostuma a escriure al principi del monomi.

$$2 \cdot a \cdot b = 2ab \quad 15 \cdot x \cdot x \cdot y = 15x^2y \quad 5p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot r = 5pq^3r$$

S'anomena **grau** d'un monomi a la suma de potències de tots els termes algebraics del monomi. Per exemple, el grau de $3x^2y^3$ és 5.

4.1.1 Suma de Monomis

Només es poden sumar o restar aquells monomis que tenen els mateixos termes algebraics (les mateixes lletres). En aquest cas es conserven els termes algebraics i es sumen o resten els nombres dels monomis.

Exemple 1

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + 4x^2 + 3x &= 7x^2 + x & 3pqr - 2pqr + 5pqr &= 6pqr \\ 5x^4 + 12x^4 &= 17x^4 & (2x^3 - 7x + 9) - (4x^3 + 2x^2 + 5x - 1) &= -2x^3 - 2x^2 - 12x + 10 \end{aligned}$$

Simplifica, calcula tant com puguis les següents sumes de monomis i digues el grau de cada monomi:

(1) $4x^2 + 3yx - 5xy - 6x^2$

(10) $7x^3yz - 7x^3yz + xyz$

(2) $5x + 2y - 2x$

(11) $2x^2y - 7x^2y$

(3) $3x^2 - 12x^2 - 4x^2 + 8x^2$

(12) $4xyz + 8xyz - 5xyz$

(4) $7y + 2y$

(13) $9a^3b - 3a^3b$

(5) $2x - 7x$

(14) $2a - b + 2c + 7d - 6a - 3b + 5c - 3b + 5a + 2b$

(6) $9a - 12a$

(15) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 + 4x^2 + 3x^4$

(7) $2r + 7r + 3r$

(16) $3x^2 - 5x^2 + 2x^2$

(8) $9x - 3x + y$

(17) $4a^3b - 3a^3b + 5a^3b$

(9) $4x^3yz - 3xy^2 - 4xy^2$

(18) $7ab^2 + 4ab^2$

(19) $3x^2 + 3x^2 + 3x^2$

(24) $x^5 - 2x^2 + 4x^5 + x^2 - 3x^5 + x^2$

(20) $x^2 - 4x^3 + 2x - 3x^3 + 5x^2 + 8x$

(25) $3a + 4b - 5a + 3a - 9b - 3b$

(21) $x^4 - 3x^2 + 3x^4 + 3x^2 - 8x^4$

(26) $4a + 3b + 3b + 4b + 5a + 2a$

(22) $x^3 - 4x^3 - 2x + 4x + 3x - x^3$

(27) $-5a - 3b + 2a - 7b + 2a - 3a + 6b$

(23) $x^2 + 8 - 3x^2 - 7 - 5 - 9 + 5x^2$

(28) $x^3 - 5x^3 - 2x^3 + x - 3x - 5x^3$

4.1.2 Multiplicació de Monomis

Per multiplicar monomis, només cal descomposar els monomis en els seus termes algebriques, i fer el monomi resultant de multiplicar tots els termes. El coeficient de nou monomi és la multiplicació dels coeficients:

$$xy^2 \cdot 2x \cdot 3y^3 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 6x^2y^5 \quad 3x^4 \cdot 5x^7 = 3 \cdot 5 \cdot x^{4+7} = 15x^{11}$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint les regles de multiplicació de potències.

Calcula els següents productes de monomis i digues el grau del monomi resultant:

(29) $6x \cdot 2x$

(37) $a^3b^2c \cdot ab^2c$

(45) $x \cdot (x^2)^3$

(30) $3a^2 \cdot 6a$

(38) $3x^2 \cdot 6x^3$

(46) $3x \cdot 7x^6$

(31) $4x \cdot 6x$

(39) $2x \cdot 3y \cdot 8x \cdot 5y$

(47) $x^7 \cdot 3x^9$

(32) $3x^2 \cdot 2x^3$

(40) $3x \cdot 2y \cdot 4x$

(48) $4x^3 \cdot 3x^2 \cdot 12x^4$

(33) $5a^2 \cdot 6a^3$

(41) $5x^2 \cdot 3y^3 \cdot 2x^3 \cdot y$

(49) $\left((2x^4)^2\right)^3$

(34) $3abba$

(42) $(3x)^2 \cdot 9x$

(50) $(2x^4)^3 \cdot (3x)^3$

(35) $x^2 \cdot x^3 \cdot x \cdot x^2$

(43) $x^4 \cdot 4x^3$

(51) $x^3 \cdot (x^2)^4 \cdot x^2$

(36) $3xy \cdot 2xy^2$

(44) $5x^2 \cdot 7x^5 \cdot x$

(52) $8x^3y^2 \cdot 7x^4y^2$

4.2 Polinomis

Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma de diversos monomis, anomenats termes del polinomi. El cas concret d'un polinomi amb dos termes s'anomena **binomi**. Són polinomis:

$$3x^5 + 4x^2 - 6x + 7 \quad x^2 + 4x + 4 \quad 3x^3 - 2x^2 + 9x - 15$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint S'anomena **grau** d'un polinomi a la potència més gran de tots els monomis que formen el polinomi. Per exemple, el polinomi $6x^4 - 3x^2 + 7x - 5$ té grau 4.

4.2.1 Suma de Polinomis

Siguin els polinomis

$$P(x) = x^2 + 2x + 3 \quad R(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad Q(x) = 3x^3 - x^2 - 5$$

$$G(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 1 \quad H(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 2 \quad S(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 3$$

$$T(x) = 2x^3 - x^2 + 7 \quad U(x) = 5x^5 + 3x^3 - 2x \quad V(x) = 3x^4 - 2x^2 - 6$$

calcula les següents operacions:

- | | | |
|---------------------------|----------------------|-------------------------------|
| (53) $P(x) + R(x)$ | (61) $3G(x) + H(x)$ | (69) $S(x) + T(x) + U(x)$ |
| (54) $P(x) + Q(x)$ | (62) $S(x) + T(x)$ | (70) $T(x) + U(x) + V(x)$ |
| (55) $R(x) + Q(x)$ | (63) $S(x) + U(x)$ | (71) $2S(x) + 5U(x)$ |
| (56) $P(x) + Q(x) + R(x)$ | (64) $S(x) + V(x)$ | (72) $3S(x) - V(x) - 7T(x)$ |
| (57) $P(x) - R(x)$ | (65) $S(x) - T(x)$ | (73) $6T(x) - 4U(x) - 2S(x)$ |
| (58) $P(x) - Q(x)$ | (66) $U(x) - T(x)$ | (74) $7V(x) - 6T(x) - 21S(x)$ |
| (59) $R(x) - Q(x)$ | (67) $V(x) - S(x)$ | |
| (60) $2G(x) - 3H(x)$ | (68) $2S(x) - 3T(x)$ | |

4.2.2 Avaluació Numérica de Polinomis

Els polinomis són una eina que ens serveixen per modelitzar la realitat. Ens serveixen per aproximar els comportaments naturals modelitzats per funcions que són tan complexes que els polinomis ens permeten fer-ho de forma més senzilla.

Per poder saber quin serà el comportament del sistema que podem estar estudiant en un moment concret, ens caldrà avaluar els polinomis per un valor concret.

Exemple 2

Si agafem el polinomi $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ anterior, si volem saber quan valdrà aquest polinomi en el punt $x = 2$ la única cosa que hem de fer, és substituir la x per el valor 2 i fer tots els càlculs que puguem.

$$P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$$

Si ara calculem $P(1)$ i $P(-3)$

$$P(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

$$P(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 1 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-3) + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$$

Si prenem els polinomis de l'apartat anterior com a model, avalua els polinomis definits anteriorment en els punts donats:

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|---------------|
| (75) $P(2)$ | (82) $Q(5)$ | (89) $H(4)$ | (96) $V(2)$ |
| (76) $P(4)$ | (83) $Q(-2)$ | (90) $U(1)$ | (97) $V(0)$ |
| (77) $P(-1)$ | (84) $G(1)$ | (91) $U(-1)$ | (98) $V(-1)$ |
| (78) $R(-1)$ | (85) $G(0)$ | (92) $U(3)$ | (99) $Q(-5)$ |
| (79) $R(-3)$ | (86) $G(-3)$ | (93) $S(2)$ | (100) $R(2)$ |
| (80) $R(4)$ | (87) $H(2)$ | (94) $S(-3)$ | |
| (81) $Q(1)$ | (88) $H(-1)$ | (95) $S(4)$ | (101) $U(10)$ |

4.2.3 Productes Notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Simplificant, es multipliquen els termes que tenen la mateixa base, seguint
Comprovem les igualtats amb les demostracions:

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

I veiem uns exemples de com es desenvolupa amb polinomis:

Exemple 3

$$(x^3 + 4)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot 4 + 4^2 = x^6 + 8x^3 + 16$$

$$(x^3 - 4)^2 = (x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot 4 + 4^2 = x^6 - 8x^3 + 16$$

$$(x^3 + 4)(x^3 - 4) = (x^3)^2 - 4^2 = x^6 - 16$$

Calcula les següents multiplicacions utilitzant, quan es pugui, les fórmules del requadre anterior.

(102) $(x + 2)^2$

(110) $(x - 5)^2$

(103) $(x - 3)^2$

(111) $(4x + 2)^2$

(104) $(x + 1)(x - 1)$

(112) $(x - 6)^2$

(105) $(x + 2)(x - 2)$

(113) $(2x + 3)^2$

(106) $(x + 3)(3 - x)$

(114) $(x - 3)(x + 1)$

(107) $(2x + 5)(2x - 5)$

(115) $(3x - 1)^2$

(108) $(x + 7)^2$

(116) $(x + 9)(x - 9)$

(109) $(2x + 1)(2x + 1)$

(117) $(x + 10)^2$

4.2.4 Multiplicació de polinomis

Per multiplicar polinomis hem de multiplicar cada monomi del primer polinomi per tots els monomis del segon polinomi, és a dir, s'han de multiplicar tots els monomis d'un per tots els monomis de l'altre. Ho podem fer de forma lineal o en forma de multiplicació per files. Si ho posem en forma de multiplicació de nombres enters de més de dos xifres, cal tenir en compte que a mida que anem multiplicant monomis s'han d'ordenar per graus de forma vertical per poder fer la suma final. Mireu els dos exemples següents:

Exemple 4

$$(x^2 - 2x + 5) \cdot (2x - 3) = 2x^3 - 4x^2 + 10x - 3x^2 + 6x - 15 = 2x^3 - 7x^2 + 16x - 15$$

$$(2x^3 - 3) \cdot (x^4 + 6x) = 2x^7 + 12x^4 - 3x^4 - 18x = 2x^7 + 9x^4 - 18x$$

	x^2	$-2x$	$+5$
	$\times$	$2x$	-3
	$-3x^2$	$+6x$	-15
$2x^3$	$-4x^2$	$+10x$	
$2x^3$	$-7x^2$	$+16x$	-15

	$2x^3$	-3
	$\times$	x^4
	$12x^4$	$-18x$
$2x^7$	$-3x^4$	
$2x^7$	$+9x^4$	$-18x$

Calcula les següents multiplicacions

(118) $(x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 3)$

(120) $(x^3 - 2x^2 + 4) \cdot (-x^2 + 5)$

(119) $(2x^2 - 3x + 4) \cdot (2x - 3)$

(121) $(6x^6 - x^3 + 4) \cdot (-2x^3 + 7)$

- (122) $(-2x^3 + 4x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 1)$ (131) $(3x^5 - 2x^4 + 3x + 7) \cdot (x - 4)$
 (123) $(3x^4 - 2x^2 + 3) \cdot (2x^2 + 5x - 7)$ (132) $(6x^4 - 3x + 7) \cdot (x - 5)$
 (124) $(7x^3 + 3x - 2) \cdot (2x^2 - 3x + 6)$ (133) $(2x^5 - 8x + 3) \cdot (x - 7)$
 (125) $(6x^3 + 2x^2 - 2) \cdot (x - 4)$ (134) $(x - 4) \cdot (x + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
 (126) $(7x^4 - 3x^2 + 4) \cdot (2x + 1)$ (135) $(x^7 - 3x^5 + x^3 - 8) \cdot (x + 3)$
 (127) $(6x^3 + 2x^2 + 4x) \cdot (x - 3)$ (136) $(x^5 - 3x^2 + 4) \cdot (x^3 - 5x^2 - 3)$
 (128) $(x - 2)^2 \cdot (x + 1)$ (137) $(x^4 - 2x^2 + 3x - 2) \cdot (x^4 - x^2 + 3)$
 (129) $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 5)$ (138) $(x^2 - 2x + 4) \cdot (x^2 + 2x + 4)$
 (130) $(3x^5 - 2x^2 + 4x + 3) \cdot (x + 2)$ (139) $(x^{120} - 4x^6 + x^2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

4.2.5 Divisió de polinomis

Veiem un exemple de divisió de monomi:

$$12x^9 : 3x^7 = \frac{12}{3}x^{9-7} = 4x^2$$

I si ara fem la divisió d'un polinomi per un altre polinomi, $(2x^3 - 5x + 3) : (x^2 - 2x)$

Exemple 5

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \qquad -5x + 3 \quad \overline{) x^2 - 2x} \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2} \\
 0 + 4x^2 - 5x \\
 \underline{-4x^2 + 8x} \\
 0 + 3x + 3
 \end{array}$$

Calcula les següents divisions

- (140) $(4x^3 - 12x^2 + 17x - 12) : (2x^2 - 3x + 4)$
 (141) $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 2x + 1)$
 (142) $(-x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 14x^2 + 20) : (x^3 - 2x^2 + 4)$
 (143) $(-12x^9 + 44x^6 - 15x^3 + 28) : (6x^6 - x^3 + 4)$
 (144) $(-2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 2x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$
 (145) $(6x^6 + 15x^5 - 25x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 15x - 21) : (3x^4 - 2x^2 + 3)$
 (146) $(14x^5 - 21x^4 + 48x^3 - 13x^2 + 24x - 12) : (7x^3 + 3x - 2)$
 (147) $(6x^4 - 22x^3 - 8x^2 - 2x + 8) : (6x^3 + 2x^2 - 2)$
 (148) $(14x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 8x + 4) : (2x + 1)$
 (149) $(6x^4 - 16x^3 - 2x^2 - 12x) : (6x^3 + 2x^2 + 4x)$
 (150) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x^2 - 4x + 4)$
 (151) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1)$
 (152) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x^2 - x - 2)$
 (153) $(x^3 + 6x^2 - x - 30) : (x^2 + x - 6)$

(154) $(x^3 + 6x^2 - x - 30) : (x - 2)$

(155) $(x^3 + 6x^2 - x - 30) : (x + 3)$

(156) $(3x^6 + 6x^5 - 2x^3 + 11x + 6) : (3x^5 - 2x^2 + 4x + 3)$

(157) $(3x^6 - 14x^5 + 8x^4 + 3x^2 - 5x - 28) : (3x^5 - 2x^4 + 3x + 7)$

(158) $(6x^5 - 30x^4 - 3x^2 + 22x - 35) : (6x^4 - 3x + 7)$

(159) $(2x^6 - 14x^5 - 8x^2 + 59x - 21) : (x - 7)$

(160) $(-2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 2x + 2) : (-2x^3 + 4x + 2)$

(161) $(x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 20) : (x^2 - 5)$

(162) $(12x^6 + 30x^5 - 50x^4 - 20x^3 + 40x^2 + 30x - 42) : (2x^2 + 5x - 7)$

(163) $(x^4 - 20x^2 + 64) : (x^2 - 16)$

(164) $(x^8 + 3x^7 - 3x^6 - 9x^5 + x^4 + 3x^3 - 8x - 24) : (x + 3)$

(165) $(3x^6 + 6x^5 - 2x^3 + 11x + 6) : (x + 2)$

4.2.6 Mètode de Ruffini

El mètode de Ruffini ens permet fer divisions de polinomis d'una manera molt senzilla i ràpida. Només treballem amb els coeficients dels polinomis, per això és molt important la posició on col·loquem els coeficients. Tot i això, el mètode de Ruffini només ens permet dividir polinomis per monomis de grau 1 del tipus $x - a$ on a és un número qualsevol.

Vegem un exemple de divisió per Ruffini. Volem dividir $(2x^3 - 5x + 3) : (x - 1)$, per això col·loquem els coeficients segons on toca i baixem el primer coeficient fins a baix (un 2 en aquest cas):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & x^3 & x^2 & x & 1 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
 x-1 \rightarrow & 1 & & & \\
 \hline
 & 2 & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
 & \downarrow & & & \\
 1 & \times & 2 & & \\
 \hline
 & 2 & & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
 & \downarrow & & & \\
 1 & \times & 2 & & \\
 & \downarrow & & & \\
 2 & \times & -3 & & \\
 \hline
 & 2 & -3 & & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Després multipliquem l'1 pel primer coeficient i el posem a sota del terme següent. Sumem en vertical i posem el resultat a sota. I tornem a repetir el procés.

En aquest cas, per tant, la divisió de $(2x^3 - 5x + 3) : (x - 1)$ és el polinomi que surt de prendre com a coeficients dels monomis els termes que sorgeixen abans del 0. En aquest cas els coeficients 2 2 -3 es converteixen en el polinomi $2x^2 + 2x - 3$.

$$(2x^3 - 5x + 3) : (x - 1) = 2x^2 + 2x - 3$$

Calcula les següents divisions utilitzant el mètode Ruffini:

(166) $(x^3 - 5x^2 + 10x - 12) : (x - 3)$

(173) $(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) : (x + 1)$

(167) $(3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x + 7) : (x + 1)$

(174) $(5x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 3x + 9) : (x + 3)$

(168) $(x^2 - 9) : (x + 3)$

(175) $(x^4 - 11x^2 + 18) : (x - 3)$

(169) $(x^2 - 9) : (x - 3)$

(176) $(x^4 - 20x^2 + 64) : (x - 4)$

(170) $(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$

(177) $(2x^5 - 12x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 10x) : (x - 5)$

(171) $(2x^3 - 5x^2 - 21x + 36) : (x - 4)$

(178) $(5x^6 + 10x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x) : (x + 2)$

(172) $(-2x^6 + 2x^5 + 5x^3 - 8x^2 + 3x) : (x - 1)$

(179) $(x^3 - x^2 - 8x + 12)i : (x + 3)$

(180) $(x^2 + 7x + 10) : (x + 5)$

(182) $(2x^2 + x - 15) : (x + 3)$

(181) $(x^3 + x^2 - 5x - 5) : (x + 1)$

(183) $(3x^3 - 13x^2 - 34x + 24) : (x - 6)$

4.3 Teorema del Residu

El **Teorema del Residu** ens diu que el residu R , que resulta de dividir un polinomi $P(x)$ entre $x - a$ és igual a $P(a)$.

Això succeeix com a conseqüència d'una de les propietats de la Divisió, que ens diu

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

on $P(x)$ és el dividend, $D(x)$ és el divisor, $Q(x)$ és quocient i $R(x)$ és el residu. I amb la condició que el grau de $R(x)$ és menor que el grau de $D(x)$.

Si apliquem aquesta propietat, prenem com a divisor $D(x) = x - a$, llavors tenim que $R(x)$ té grau menor qu 1, és a dir, el grau del residu és 0. Per tant, en aquest cas $R(x) = r$ on $r \in \mathbb{R}$. I per tant, si apliquem la propietat de la divisió, obtenim que:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

Si ara, prenem el valor $x = a$, i avaluem $P(a)$, obtenim que

$$P(a) = r$$

Per tant, podem avaluar un polinomi en un punt $x = a$, calculant el residu de la divisió del polinomi per $x - a$.

Com exercicis pots refer tots els exercicis de l'apartat d'**Avaluació Numérica de Polinomis** utilitzant el mètode de Ruffini.

4.4 Arrels de Polinomis

Si $x - a$ és un divisor del polinomi $P(x)$, es diu que a és arrel de $P(x)$, pel teorema del residu sabem que això equival a dir que $P(a) = 0$.

Per tant, si obtenim un valor a tal que $P(a) = 0$ direm que és una arrel del polinomi $P(x)$.

Per exemple, si tenim el polinomi $P(x) = x^3 - 1$, sabem que -1 és arrel de $P(x)$ perquè $P(-1) = (-1)^3 - 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$.

Una propietat que podrem utilitzar és que les arrels no nul·les d'un polinomi amb coeficients sencers, són divisors del coeficient de menys grau del polinomi.

Per exemple, si tenim el polinomi $P(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$, aquesta propietat ens assegura que les arrels d'aquest polinomi han de ser divisors del terme de menys grau, en aquest cas, de 4.

Si provem per Ruffini diferents divisors de 4 (que poden ser 1, -1 , 2, -2 , 4 i -4). Efectivament, les arrels d'aquest polinomi són 1, -1 i 4. El Geogebra és una eina molt útil per comprovar aquests resultats.

Troba les arrels dels següents polinomis:

(184) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

(188) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

(185) $x^2 + 9x - 1312$

(189) $x^2 - 18x - 819$

(186) $x^5 + 7x^4 - 68x^2 - 32x + 192$

(190) $x^5 - 11x^3 + 6x^2 + 28x - 24$

(187) $x^8 - 5x^7 - 25x^6 + 65x^5 + 84x^4$

(191) $x^9 - 7x^8 + 15x^7 - 9x^6$

Resol les següents equacions:

(192) $x - 12 = \frac{60-47x}{x^2}$

(194) $\frac{x^2}{3} - x + 4 = \frac{8}{3x} + x$

(196) $(x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 10$

(193) $(x - 2)^2 + (x + 3)^2 = 17$

(195) $x(x^2 - 7) = 6$

4.5 Factorització de Polinomis

La factorització d'un polinomi consisteix a escriure'l com a producte de polinomis. Les factoritzacions interessants són aquelles que permeten escriure el polinomi inicial com a producte de polinomis de grau inferior al grau del polinomi de sortida. Un polinomi per al qual no existeix cap factorització d'aquest tipus es diu un polinomi irreductible.

Descomposa els següents polinomis en factors simples:

$$(197) \quad x^3 - 4x^2 - 11x + 30$$

$$(210) \quad 5x^7 + 25x^5$$

$$(198) \quad x^3 - 3x^2 + 4$$

$$(211) \quad 4x^5 - 4x^4 - 36x^3 + 36x^2$$

$$(199) \quad x^3 - 4x^2 - x + 4$$

$$(212) \quad 3x^3 - 21x^2 + 48x - 36$$

$$(200) \quad x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$(213) \quad 6x^4 + 30x^3 + 18x^2 - 54x$$

$$(201) \quad x^4 + 5x^3 - 25x^2 - 125x$$

$$(214) \quad 4x^6 - 16x^5 + 24x^4 - 16x^3 + 4x^2$$

$$(202) \quad x^4 + 4x^3 - 21x^2$$

$$(215) \quad 2x^4 + 14x^3 + 36x^2 + 40x + 16$$

$$(203) \quad x^3 + 6x^2 - x - 30$$

$$(216) \quad x^5 - 9x^4 + 23x^3 + 9x^2 - 108x + 108$$

$$(204) \quad x^4 - 10x^2 + 9$$

$$(217) \quad x^3 - 5x^2 - 22x - 56$$

$$(205) \quad x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 18x^2$$

$$(218) \quad 7x^3 - 14x^2 - 35x + 42$$

$$(206) \quad x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 103x + 210$$

$$(219) \quad 5x^4 - 10x^3 - 130x^2 + 300x + 1125$$

$$(207) \quad x^3 - 4x^2 - 7x + 10$$

$$(220) \quad x^6 + 9x^5 + 33x^4 + 63x^3 + 66x^2 + 36x + 8$$

$$(208) \quad 3x^3 - 39x - 36$$

$$(221) \quad 3x^6 - 18x^5 + 45x^4 - 60x^3 + 45x^2 - 18x + 3$$

$$(209) \quad 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 + 10x$$

4.6 MCD i MCM de Polinomis

Per calcular el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple d'un conjunt de polinomis, hem de descomposar cada polinomi en factors irreductibles, i després seguir la mateixa regla que amb els nombres enters.

- El màxim comú divisor es calcula com el producte dels factors comuns elevats a l'exponent més petit.
- El mínim comú múltiple es calcula com el producte dels tots els factors, comuns i no comuns, elevats al major exponent. Anem a veure com es calcula en *mcd* i el *mcm* a partir de l'exemple següent:

Exemple 6

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x+2)^3 & Q(x) &= (x-1)^2(x+2)(x+1)^3 \\ \text{mcd}(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+2) & \text{mcm}(P(x), Q(x)) &= (x-1)^2(x+2)(x+1)^3 \end{aligned}$$

- El màxim comú divisor de dos polinomis, $P(x)$ i $Q(x)$, és un polinomi que és divisor d'ambdós, i que a més, té el grau més alt entre tots els seus divisors comuns. Si el màxim comú divisor de dos polinomis és 1 diem que són primers entre ells.
- El mínim comú múltiple de dos polinomis, $P(x)$ i $Q(x)$, és un polinomi que és múltiple d'ambdós, i que a més, té el grau més petit entre tots els múltiples comuns.

Calcula el *mcd* i el *mcm* de la següent parell de polinomis:

$$(222) \quad P(x) = (x+1)(x-1) \text{ i } Q(x) = (x-1)^2(x-3)$$

$$(223) \quad P(x) = (x-1)^2(x+5) \text{ i } Q(x) = (x-2)(x-5)$$

- (224) $P(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$ i $Q(x) = (x-3)^2(x-2)$ (229) $P(x) = (201)$ i $Q(x) = (203)$
 (225) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ i $Q(x) = x^3 - 7x + 6$ (230) $P(x) = (199)$ i $Q(x) = (204)$
 (226) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ i $Q(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ (231) $P(x) = (208)$ i $Q(x) = (199)$
 (227) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$ i $Q(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ (232) $P(x) = (213)$ i $Q(x) = (219)$
 (228) $P(x) = (197)$ i $Q(x) = (198)$ (233) $P(x) = (215)$ i $Q(x) = (220)$

4.7 Fraccions algebraiques

Tota la teoria que hem estudiat en aquesta unitat la utilitzarem ara per simplificar fraccions algebraiques on trobem polinomis en el numerador i/o denominador. L'objectiu serà obtenir fraccions algebraiques irreductibles equivalents a una donada.

Per tal de simplificar fraccions algebraiques, seguirem els mateixos passos que realitzem per simplificar fraccions numèriques. En primer lloc, descompondrem els polinomis del numerador i el denominador en factors irreductibles, i tot seguit cancel·larem aquells factors que siguin comuns al numerador i al denominador.

Exemple 7

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}} = \frac{x-1}{x}$$

Com podem veure en aquest exemple, el primer pas és factoritzar els polinomis del numerador i el denominador. A continuació, cancel·lem aquells factors que són comuns a ambdós. En aquest cas, $x-2$.

Exemple 8

$$\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} = \frac{(x+3)}{1} = (x+3)$$

En aquest segon exemple, després de la factorització del numerador i el denominador, els factors que hem cancel·lat són $(x+1)(x-1)$. És important remarcar que la simplificació del denominador $(x^2 - 1)$ no comporta trobar les arrels d'aquest polinomi, ni fer cap divisió per Ruffini. Només cal recordar la identitat notable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, on a seria x i b seria 1.

Simplifica les següents fraccions algebraiques:

- (224) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ (230) $\frac{x^{11} + 4x^{10} + 3x^9}{x^9 + x^8 - 6x^7}$ (236) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$
 (225) $\frac{x^2 - 8x + 16}{5x - 20}$ (231) $\frac{2}{x-1} - \frac{6x}{x-1}$ (237) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 15}$
 (226) $\frac{4x^2 - 4}{x - 1}$ (232) $\frac{2}{x-1} + \frac{6x}{x+1}$ (238) $\frac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24}$
 (227) $\frac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}$ (233) $\frac{2}{x-1} - \frac{6x}{x^2 - 1}$ (239) $\frac{x^4 - 15x^2 + 10x + 24}{x^4 - 10x^2 + 9}$
 (228) $\frac{x^9 - 4x^8 + 3x^7}{x^{14} - 2x^{13} - 5x^{12} + 6x^{11}}$ (234) $\frac{x+2}{x^2 - x - 6}$ (240) $\frac{x+1}{2} - \frac{2(x-2)}{3}$
 (229) $\frac{x^3 + 6x^2 - x - 30}{x^3 - 7x + 6}$ (235) $\frac{x+3}{x^2 - x - 12}$ (241) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$

$$(242) \quad \frac{3x}{x^2-1} - \frac{3}{x^2-1}$$

$$(243) \quad \frac{1}{x^2-x} - \frac{2-x}{x-1}$$

$$(244) \quad \frac{2x}{x+1} + \frac{-3x}{x^2-1}$$

$$(245) \quad \frac{x+1}{x^2-x-2} + \frac{-x-1}{x-2}$$

$$(246) \quad \frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x(x+1)} - \frac{2x-1}{x+1}$$

$$(247) \quad \frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$$

4.8 Solucions

$$(1) \quad -2x^2 - 2xy$$

$$(2) \quad 3x + 2y$$

$$(3) \quad -5x^2$$

$$(4) \quad 9y$$

$$(5) \quad -5x$$

$$(6) \quad -3a$$

$$(7) \quad 12r$$

$$(8) \quad 6x + y$$

$$(9) \quad 4x^3yz - 7xy^2$$

$$(10) \quad xyz$$

$$(11) \quad -5x^2y$$

$$(12) \quad 7xyz$$

$$(13) \quad 6a^3b$$

$$(14) \quad a - 5b + 7c + 7d$$

$$(15) \quad 5x^4 - 6x^3 + 6x^2$$

$$(16) \quad 0$$

$$(17) \quad 6a^3b$$

$$(18) \quad 11ab^2$$

$$(19) \quad 9x^2$$

$$(20) \quad -7x^3 + 6x^2 + 10x$$

$$(21) \quad -4x^4$$

$$(22) \quad -4x^3 + 5x$$

$$(23) \quad 3x^2 - 13$$

$$(24) \quad 2x^5$$

$$(25) \quad a - 8b$$

$$(26) \quad 11a + 10b$$

$$(27) \quad -4a - 4b$$

$$(28) \quad -11x^3 - 2x$$

$$(29) \quad 12x^2$$

$$(30) \quad 18a^3$$

$$(31) \quad 24x^2$$

$$(32) \quad 6x^5$$

$$(33) \quad 30a^5$$

$$(34) \quad 3a^2b^2$$

$$(35) \quad x^8$$

$$(36) \quad 6x^2y^3$$

$$(37) \quad a^4b^4c^2$$

$$(38) \quad 18x^5$$

$$(39) \quad 240x^2y^2$$

$$(40) \quad 24x^2y$$

$$(41) \quad 30x^5y^4$$

$$(42) \quad 81x^3$$

$$(43) \quad 4x^7$$

$$(44) \quad 35x^8$$

$$(45) \quad x^7$$

$$(46) \quad 21x^7$$

$$(47) \quad 3x^{16}$$

$$(48) \quad 144x^9$$

$$(49) \quad 64x^{24}$$

$$(50) \quad 216x^{15}$$

$$(51) \quad x^{13}$$

$$(52) \quad 56x^7y^4$$

$$(53) \quad 3x^2 - x + 4$$

$$(54) \quad 3x^3 + 2x - 2$$

$$(55) \quad 3x^3 + x^2 - 3x - 4$$

$$(56) \quad 3x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$(57) \quad -x^2 + 5x + 2$$

$$(58) \quad -3x^3 + 2x^2 + 2x + 8$$

$$(59) \quad -3x^3 + 3x^2 - 3x + 6$$

$$(60) \quad 2x^5 - 3x^4 - 17x^3 + 7x^2 + 8$$

$$(61) \quad 3x^5 + x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 1$$

$$(62) \quad x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x + 4$$

$$(63) \quad 5x^5 + x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

$$(64) \quad 4x^4 - 5x^2 + 5x - 9$$

$$(65) \quad x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x - 10$$

$$(66) \quad 5x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 7$$

$$(67) \quad 2x^4 + x^2 - 5x - 3$$

$$(68) \quad 2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 10x - 27$$

$$(69) \quad 5x^5 + x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x + 4$$

$$(70) \quad 5x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$(71) \quad 25x^5 + 2x^4 + 15x^3 - 6x^2 - 6$$

$$(72) \quad -14x^3 + 15x - 52$$

$$(73) \quad -20x^5 - 2x^4 - 2x + 48$$

$$(74) \quad -12x^3 + 55x^2 - 105x - 21$$

$$(75) \quad 11$$

$$(76) \quad 27$$

$$(77) \quad 2$$

$$(78) \quad 6$$

$$(79) \quad 28$$

$$(80) \quad 21$$

$$(81) \quad -3$$

$$(82) \quad 345$$

$$(83) \quad -33$$

$$(84) \quad 0$$

$$(85) \quad 1$$

$$(86) \quad -116$$

$$(87) \quad 34$$

$$(88) \quad -5$$

$$(89) \quad 430$$

$$(90) \quad 6$$

$$(91) \quad -6$$

$$(92) \quad 1290$$

- (93) 11
 (94) 36
 (95) 225
 (96) 34
 (97) -6
 (98) -5
 (99) -405
 (100) 7
 (101) 502980
 (102) $x^2 + 4x + 4$
 (103) $x^2 - 6x + 9$
 (104) $x^2 - 1$
 (105) $x^2 - 4$
 (106) $9 - x^2$
 (107) $4x^2 - 25$
 (108) $x^2 + 14x + 49$
 (109) $4x^2 + 4x + 1$
 (110) $x^2 - 10x + 25$
 (111) $16x^2 + 16x + 4$
 (112) $x^2 - 12x + 36$
 (113) $4x^2 + 12x + 9$
 (114) $x^2 - 2x - 3$
 (115) $9x^2 - 6x + 9$
 (116) $x^2 - 81$
 (117) $x^2 + 20x + 100$
 (118) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
 (119) $4x^3 - 12x^2 + 17x - 12$
 (120) $-x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 14x^2 + 20$
 (121) $-12x^9 + 44x^6 - 15x^3 + 28$
 (122) $-2x^5 + 6x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 2x + 2$
 (123) $6x^6 + 15x^5 - 25x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 15x - 21$
 (124) $14x^5 - 21x^4 + 48x^3 - 13x^2 + 24x - 12$
 (125) $6x^4 - 22x^3 - 8x^2 - 2x + 8$
 (126) $14x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 8x + 4$
 (127) $6x^4 - 16x^3 - 2x^2 - 12x$
 (128) $x^3 - 3x^2 + 4$
 (129) $x^3 + 6x^2 - x - 30$
 (130) $3x^6 + 6x^5 - 2x^3 + 11x + 6$
 (131) $3x^6 - 14x^5 + 8x^4 + 3x^2 - 5x - 28$
 (132) $6x^5 - 30x^4 - 3x^2 + 22x - 35$
 (133) $2x^6 - 14x^5 - 8x^2 + 59x - 21$
 (134) $x^4 - 20x^2 + 64$
 (135) $x^8 + 3x^7 - 3x^6 - 9x^5 + x^4 + 3x^3 - 8x - 24$
 (136) $x^8 - 5x^7 - 6x^5 + 15x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12$
 (137) $x^8 - 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x - 6$
 (138) $x^4 + 4x^2 + 16$
 (139) $x^{122} - 2x^{121} + 4x^{120} - 4x^8 + 8x^7 - 16x^6 + x^4 - 2x^3 + 4x^2$
 (140) $2x - 3$
 (141) $x - 3$
 (142) $-x^2 + 5$
 (143) $-2x^3 + 7$
 (144) $-2x^3 + 4x + 2$
 (145) $2x^2 + 5x - 7$
 (146) $2x^2 - 3x + 6$
 (147) $x - 4$
 (148) $7x^4 - 3x^2 + 4$
 (149) $x - 3$
 (150) $x + 1$
 (151) $x^2 - 4x + 4$
 (152) $x - 2$
 (153) $x + 5$
 (154) $x^2 + 8x + 15$
 (155) $x^2 + 3x - 10$
 (156) $x + 2$
 (157) $x - 4$
 (158) $x - 5$
 (159) $2x^5 - 8x + 3$
 (160) $x^2 - 3x + 1$
 (161) $x^3 - 2x^2 + 4$
 (162) $6x^4 - 4x^2 + 6$
 (163) $x^2 - 4$
 (164) $x^7 - 3x^5 + x^3 - 8$
 (165) $3x^5 - 2x^2 + 4x + 3$
 (166) $x^2 - 2x + 4$
 (167) $3x^3 - 5x + 7$
 (168) $x - 3$
 (169) $x + 3$
 (170) $x^4 - 2x^2 + 5$
 (171) $2x^2 + 3x - 9$
 (172) $-2x^5 + 5x^2 - 3x$
 (173) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
 (174) $5x^3 - 2x + 3$
 (175) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6$
 (176) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$
 (177) $2x^4 - 2x^3 + 2x$
 (178) $5x^5 - 3x^3 + 2x$
 (179) $x^2 - 4x + 4$
 (180) $x + 2$
 (181) $x^2 - 5$
 (182) $2x - 5$
 (183) $3x^2 + 5x - 4$
 (184) $x = 1, 3, 5$
 (185) $x = 32, 41$
 (186) $x = 2, 4, -3$
 (187) $x = -4, -1, 0, 3, 7$
 (188) $x = 1, 3, -2$
 (189) $x = 39, -21$
 (190) $x = 2, -3, -2, 1$
 (191) $x = 0, 1, 3$
 (192) $x = 3, 4, 5$
 (193) $x = -2, 1$
 (194) $x = 2$
 (195) $x = 3, -1, -2$
 (196) $x = -2, 0$
 (197) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$
 (198) $(x - 2)^2(x + 1)$
 (199) $(x - 1)(x + 1)(x - 4)$
 (200) $(x - 2)(x + 3)(x + 4)$
 (201) $(x - 5)(x + 5)^2x$
 (202) $(x - 3)(x + 7)x^2$
 (203) $(x - 2)(x + 3)(x + 5)$

(204) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

(205) $(x+1)x^2(x-3)(x+6)$

(206) $(x-7)(x+2)(x-5)(x+3)$

(207) $(x-1)(x+2)(x-5)$

(208) $3(x-4)(x+3)(x+1)$

(209) $2(x-5)(x+1)(x-1)x$

(210) $5x^3(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

(211) $4(x-1)(x+3)(x-3)x^2$

(212) $3(x-2)^2(x-3)$

(213) $6(x+3)^2(x-1)x$

(214) $4(x-1)^4x^2$

(215) $2(x+2)^3(x+1)$

(216) $(x-3)^3(x-2)(x+2)$

(217) $(x-2)(x+4)x-7$

(218) $7(x-1)(x+2)(x-3)$

(219) $5(x+3)^2(x-5)^2$

(220) $(x+2)^3(x+1)^3$

(221) $3(x-1)^6$

(222) $mcd = (x-1)$
 $mcm = (x-1)^2(x-3)(x+1)$

(223) $mcd = 1$
 $mcm = (x-1)^2(x+5)(x-2)(x-5)$

(224) $mcd = (x-3)$
 $mcm = (x-3)^2(x-1)(x+1)(x-2)$

(225) $mcd = (x-1)(x-2)$
 $mcm = (x-1)(x-2)(x-3)(x+3)$

(226) $mcd = (x-5)(x+1)$
 $mcm = (x-5)(x+1)^2(x-1)$

(227) $mcd = x(x-1)(x+1)$
 $mcm = x^2(x-1)(x+1)^2(x+3)$

(228) $mcd = (x-2)$
 $mcm = (x-2)^2(x+3)(x-5)(x+1)$

(229) $mcd = (x+5)$
 $mcm = x(x+5)^2(x-5)(x-2)(x+3)$

(230) $mcd = (x-1)(x+1)$
 $mcm = (x-1)(x+1)(x-4)(x+3)(x-3)$

(231) $mcd = (x+1)$
 $mcm = 3(x-4)(x+3)(x-1)(x+1)(x-4)$

(232) $mcd = (x+3)^2$
 $mcm = 5(x+3)^2(x-5)^2(x-1)x$

(233) $mcd = (x+1)$
 $mcm = 2(x+1)^3(x+2)^3(x-2)^3$

(234) $\frac{x-3}{x+3}$

(235) $\frac{x-4}{5}$

(236) $4(x+1)$

(237) $\frac{x+1}{x-4}$

(238) $\frac{1}{x^4(x+2)}$

(239) $\frac{x+5}{x-1}$

(240) $\frac{x^2(x+1)}{x-2}$

(241) $\frac{6x+2}{x-1}$

(242) $\frac{6x^2-4x+2}{x^2-1}$

(243) $\frac{8x+2}{x^2-1}$

(244) $\frac{1}{x-3}$

(245) $\frac{1}{x-4}$

(246) $x-2$

(247) $\frac{x+2}{x+3}$

(248) $\frac{1}{x-3}$

(249) $\frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+3)}$

(250) $\frac{11-x}{6}$

(251) $\frac{2x+3}{x(x+3)}$

(252) $\frac{3}{x+1}$

(253) $\frac{x-1}{x}$

(254) $\frac{x(2x-5)}{x^2-1}$

(255) $\frac{x}{2-x}$

(256) $\frac{-x^2+10x+5}{x(x+1)}$

(257) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$

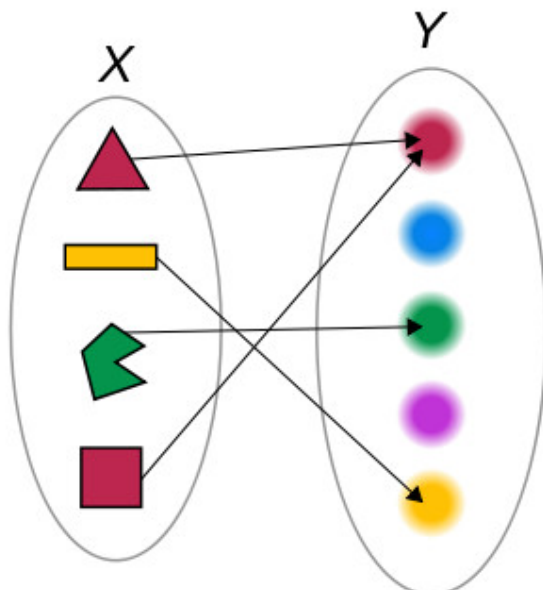
Capítol 5

Funcions

5.1 Idea Intuïtiva de funció

Una funció és una regla o procediment que estableix una determinada sortida per cada entrada. Per exemple:

- Una pedra que es deixa caure d'un edifici triga un temps diferent a arribar a terra segons el pis del qual es deixa caure. Per exemple pot prendre 2 segons si es deixa caure del 2ⁿ pis o 4 segons si es deixa caure del 8^è. Tenint la coneixença del pis del qual es deixa caure la pedra, la sortida de la funció seria el temps que triga la pedra a arribar a terra.
- En un grup de gent s'hi trobaran diverses persones als quals els agrada algun color: vermell, taronja, groc, verd, blau, indi i morat. L'entrada de la funció podria ser la persona i l'eixida seria un dels set colors. Els colors favorits són una funció de la persona al color. A una persona, per exemple, li pot agradar el vermell, mentre que a una altra pot agradar el morat. Tot i això és perfectament possible que a dues o més persones els agrade el mateix color.
- Sigui X un conjunt de quatre formes: un triangle vermell, un rectangle groc, un hexàgon verd i un quadrat vermell; i si fos Y un conjunt compost de cinc colors: vermell, blau, verd, rosa i groc. Vincular cada forma amb el seu color és una funció de X a Y : cada forma es vincula amb un color. No hi ha forma sense vincle i cap de les formes es vincula a dos o més colors. Aquesta funció s'anomenarà com la "funció del color-de-la-forma".



L'entrada d'una funció s'anomena argument (o antiimatge), i la sortida s'anomena valor (o imatge). Les funcions s'utilitzen com a models matemàtics que permeten interpretar millor molts fenòmens. Es tracta d'elaborar aquests models, que moltes vegades són simplificacions de fenòmens naturals o socials més complexos, de manera que ens permetin realitzar prediccions que, posteriorment, són confirmades o desmentides pels fets. D'aquesta manera podem saber si el model proposat és o no fiable.

Una funció relaciona dues magnituds, de manera que a cada valor d'una d'elles li correspon un únic valor de l'altra.

5.2 Concepte de funció

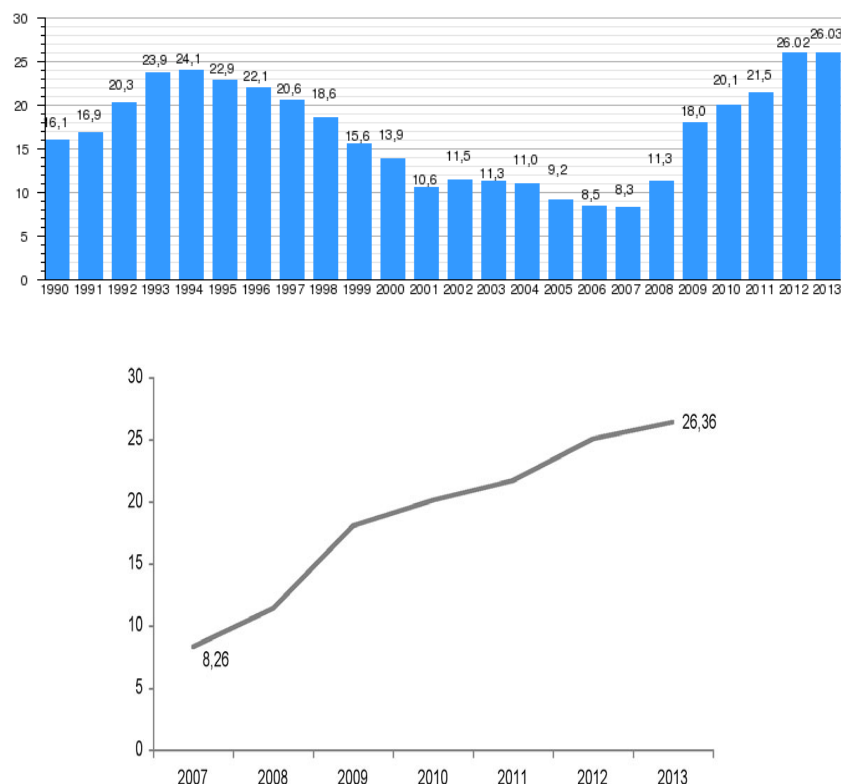
Cal anar en compte amb la representació gràfica de les funcions perquè uns mateixos valors ens poden portar a interpretacions diferents.

Per exemple, ara ho mostrem dues gràfiques que ens mostren el mateix. L'evolució del percentatge d'atur a l'Estat Espanyol al llarg dels anys.

Si ens fixem en la segona gràfica, la interpretació que fem és que està pujant molt i molt, i no sembla que tingui intenció de baixar. En canvi, si fem la gràfica amb les mateixes dades, però amb més anys d'antelació, sembla que estiguem en un cicle que es repeteix. Però si ens fixem en els anys, ja en fa molts i preguntant a persones més grans, també recordaran la crisi dels anys 90.

D'aquí en podem treure moltes conclusions diferents.

Però el que volem deixar clar, és que cal saber interpretar els gràfics que ens mostren, tant en els mitjans de comunicació com en els llibres. Cal saber llegir, les variables, les condicions en que es prenen les dades, a on s'han pres les dades, qui ha creat el gràfic, quina intenció té el que ens ensenya el gràfic, quina és l'evolució i la tendència de la funció que estudiem, i un munt de indicadors que porta incorporada una gràfica dins.



Aquest tema ens dedicarem a estudiar els índexs i les característiques de les funcions per poder-ne fer un estudi més complet més endavant.

5.3 Domini i recorregut d'una funció

El conjunt de totes les entrades permeses per una funció determinada s'anomena **domini** de la funció, mentre que el conjunt de les sortides permeses s'anomena **recorregut**.

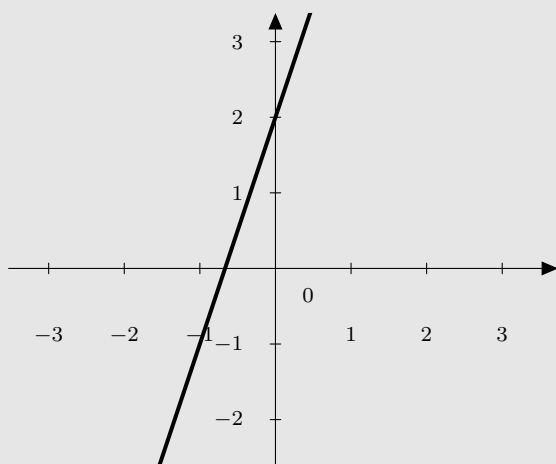
D'aquesta manera, en l'exemple de la “funció del color-de-la-forma”, el domini és el conjunt de quatre formes i el codomini consisteix en els cinc colors. El concepte d'una funció no requereix que cada possible sortida sigui el valor de cada argument, per exemple: el color blau no és el color de cap de les quatre formes a X.

Tots els valors de la variable independent que pertanyen al domini tenen una i només una imatge, condició necessària per tal que f sigui funció.

Escriurem el domini com D_f i el recorregut com R_f .

El domini fa referència als valors de la variable independent x , i el recorregut fa referència als valors de la variable dependent y .

Exemple 1



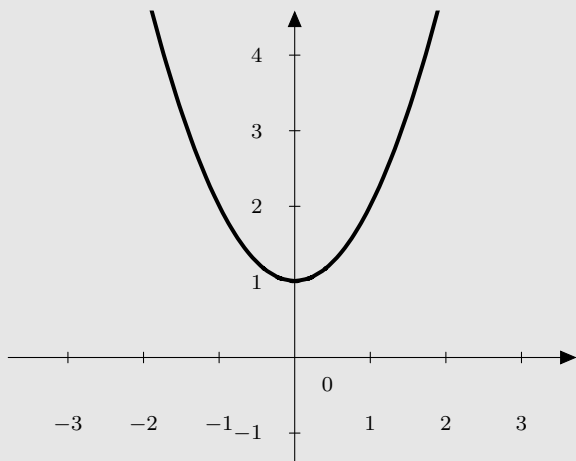
$$f(x) = 3x + 2$$

Observem que qualsevol valor real que apliquem a la funció sempre es donarà un altre valor real. No hi ha cap valor en que tinguem algun problema.

Per tant, el domini d'aquesta funció són tots els nombres reals, és a dir, $D_f = \mathbb{R}$.

En la representació gràfica de la funció apreciem que qualsevol valor real té una antiimatge, per tant el recorregut són tots els nombres reals: $R_f = \mathbb{R}$.

Exemple 2

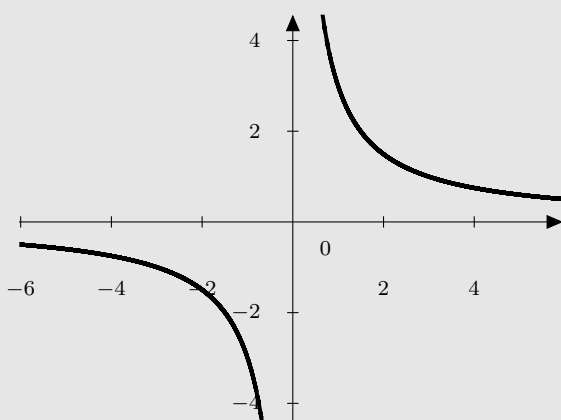


$$f(x) = x^2 + 1$$

El $D_f = \mathbb{R}$ perquè puc elevar a dos i restar-li un a qualsevol nombre real.

En canvi, a la gràfica de la funció observem que hi ha valors que no tenen antiimatge.

Per exemple, no hi ha cap valor real de la y que prengui el valor -1 . Tots els valors de y són iguals o més grans que 1. Per tant, $R_f = [1, +\infty)$.

Exemple 3

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

En aquest exemple, observem que tenim un problema per valors de $x = 0$, amb els altres no. Per tant, direm que el domini de la funció són tots els nombres reals menys el 0, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

I si ens fixem en la gràfica de la funció, veurem que tots els valors de la variable y tenen antiimatge menys el 0. Per tant, el recorregut és $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.4 Operacions amb funcions

Utilitzant dues o més funcions podem obtenir noves funcions utilitzant operacions amb elles. Com la suma, el producte, el quocient i la composició. Com que treballem amb funcions reals de variable real, extrapolarem les propietats dels nombres reals a les operacions amb funcions.

5.4.1 Funció suma

Donades dues funcions f i g , es defineix la funció suma $f + g$ com:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Si $f(x) = 2x$ i $g(x) = x^2 - x$, l'expressió algebraica de la funció suma vindrà donada per:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + x^2 - x = x^2 + x$$

Si avaluem la funció suma en qualsevol punt, per exemple, prenem $x = 3$ obtenim que

$$f(3) = 6, \quad g(3) = 6 \quad (f + g)(3) = 12 \quad \implies \quad (f + g)(3) = f(3) + g(3)$$

5.4.2 Funció producte

Donades dues funcions f i g , es defineix la funció producte $f \cdot g$ com:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Si $f(x) = 2x$ i $g(x) = x^2 - x$, l'expressió algebraica de la funció producte vindrà donada per:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 2x \cdot (x^2 - x) = 2x^3 - 2x^2$$

Si avaluem la funció producte en qualsevol punt, per exemple, prenem $x = 3$ obtenim que

$$f(3) = 2 \cdot 3 = 6, \quad g(3) = 3^2 - 3 = 6 \quad (f \cdot g)(3) = 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 = 36 \quad \implies \quad (f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3)$$

També cal tenir present que Si $f(x) = k \in \mathbb{R}$ llavors $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = k \cdot g(x)$

5.4.3 Funció quocient

Donades dues funcions f i g , es defineix la funció quocient $\frac{f}{g}$ com:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = 3x - 6$, l'expressió algebraica de la funció quocient vindrà donada per:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{3x - 6}$$

Si avaluem la funció quocient en qualsevol punt, per exemple, prenem $x = 3$ obtenim que

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9, \quad g(3) = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \quad \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3 \cdot 3 - 6} = \frac{9}{3} = 3 \quad \implies \quad \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)}$$

El domini d'aquesta nova funció està constituït per tots els nombres reals, excepte per $x = 2$. En aquest cas, existeixen $f(2)$ i $g(2)$, però en canvi no existeix $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$. La raó és que $g(2) = 0$.

5.4.4 Funció composta

Finalment, l'operació entre funcions més important i molt diferent a les anteriors és la composició de funcions. La representarem amb el símbol $\circ$. Donades les funcions f i g , es defineix com a funció composta $g \circ f$, és a dir, f composta de g , com:

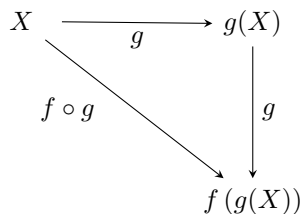
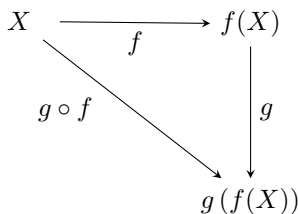
$$(g \circ f) = g(f(x))$$

L'operació que cal fer és la de substituir la variable x de la funció $g(x)$ per $f(x)$. Es defineix de la mateixa manera $f \circ g$, és a dir, g composta de f :

$$(f \circ g) = f(g(x))$$

En aquest cas, es comprova que és una operació no commutativa, és a dir, no té perquè ser el mateix $g \circ f$ que $f \circ g$.

La primera funció que s'aplica és la que es troba més a prop de la variable x , i també és la primera que es llegeix. Per aquest motiu, la composició de funcions es llegeix a l'inrevés de com s'escriu.



Exemple 4

Donades les següents funcions $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = 2x - 3$ calculem totes les composicions possibles entre elles: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ i $g \circ g$:

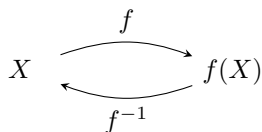
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$
- $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$
- $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 6 - 3 = 4x - 9$

5.5 Funció inversa d'una funció

La funció inversa d'una funció f és la funció f^{-1} que verifica:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

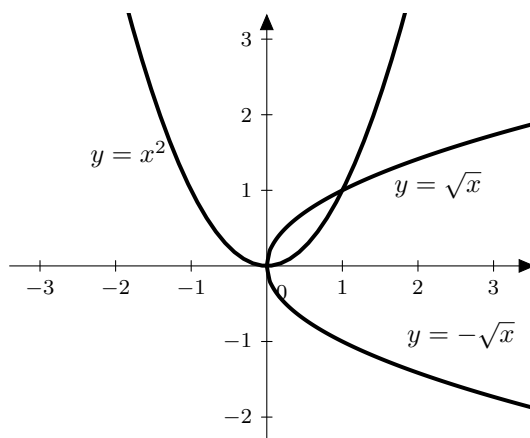
La funció f^{-1} assigna cada valor de la variable y un valor de la variable x , de manera que la variable independent de f passa a ser la variable dependent de f^{-1} , i a l'inrevés. Ho representem de la següent manera:



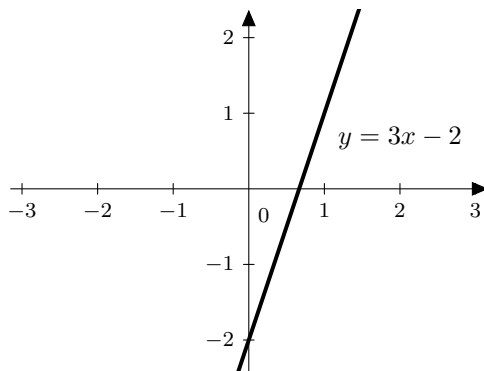
Naturalment, per tal que f^{-1} sigui una funció, cal que cada valor d' y tingui una i només una imatge de x . Aquesta condició no es verifica sempre, ja que hi ha funcions f que fan correspondre la mateixa imatge y a valors diferents d' x . Per tant, no totes les funcions tenen una funció inversa. Per exemple, si consideren la funció $f(x) = x^2$ es verifica:

$$f(x_0) = f(-x_0) = x_0^2 \longrightarrow f^{-1}(x_0^2) = x_0 \text{ i } f^{-1}(x_0^2) = -x_0$$

Per tant, f^{-1} no és una funció. No existeix la funció inversa de $f(x) = x^2$. Pots comprovar-ho a les gràfiques següents:



Llavors se'ns planteja la pregunta següent. Com podem saber si una funció té inversa o no? Agafem com exemple la funció $y = 3x - 2$. Si la representem gràficament, observem que no existeixen dos valors diferents de x , que les seves imatges siguin iguals. És a dir, $\nexists x_1, x_2$ tal que $x_1 \neq x_2$ i $f(x_1) = f(x_2)$.



Per trobar la funció inversa d'una funció, cal seguir els següents passos:

- (1) Expressar la variable y en funció de la variable x .

$$y = 3x - 2$$

- (2) Aïllar la variable x de la igualtat anterior a fi i efecte de trobar l'expressió d' x en funció de y :

$$3x = y + 2 \longrightarrow x = \frac{y + 2}{3}$$

Així obtenim $x = f^{-1}(y)$.

- (3) Canviem les dues variables, la y passa a ser la x i a l'inrevés i obtenim:

$$f^{-1}(x) = \frac{y + 2}{3}$$

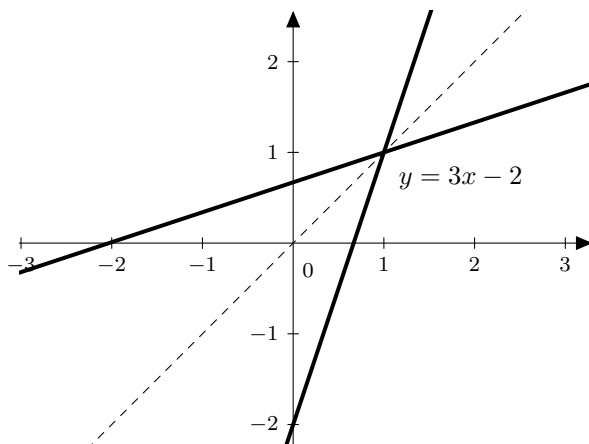
Obtenim l'expressió de la funció inversa de $f(x) = 3x - 2$, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

Cal comprovar que la funció que hem obtingut és realment la funció inversa. Per fer-ho, només hem de compondre les dues funcions, f i f^{-1} en els dos sentits. És a dir, en aquest cas:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+2}{3} - 2 = x + 2 - 2 = x$$

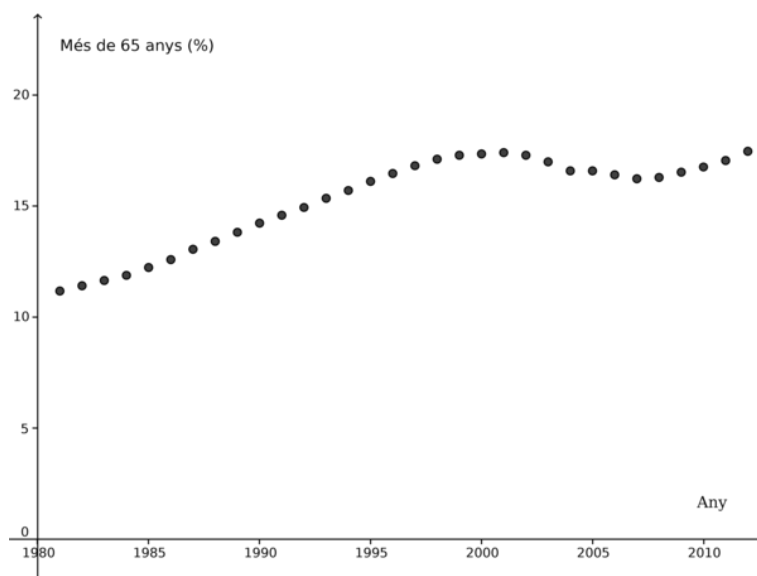
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x - 2) + 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

Si representem gràficament les funcions f i f^{-1} observem que són simètriques respecte l'eix donat per la recta $y = x$, és a dir, la bisectriu del I i III quadrant.



5.6 Característiques generals de la gràfica d'una funció

En aquest apartat veurem les característiques que ens caldrà cercar per poder obtenir una representació gràfica de qualsevol funció. Una funció es pot expressar de moltes maneres, i una de les més utilitzades és la representació gràfica, ja que ens permet a primer cop d'ull veure quin és el comportament del sistema que estem estudiant.



Si, per exemple, volem veure la relació que hi ha entre l'any que som i el percentatge de gent de més de 65 anys que hi ha a la població de Catalunya, obtenim aquesta gràfica:

Quines conclusions en podem treure?

La població catalana té tendència a ser més gran? Això vol dir que no hi ha tants naixements?

Com és que a partir del 2000 hi ha una tendència a baixar? I perquè torna a pujar?

Té a veure amb la immigració? De mitjana és més jove la gent que ha immigrat?

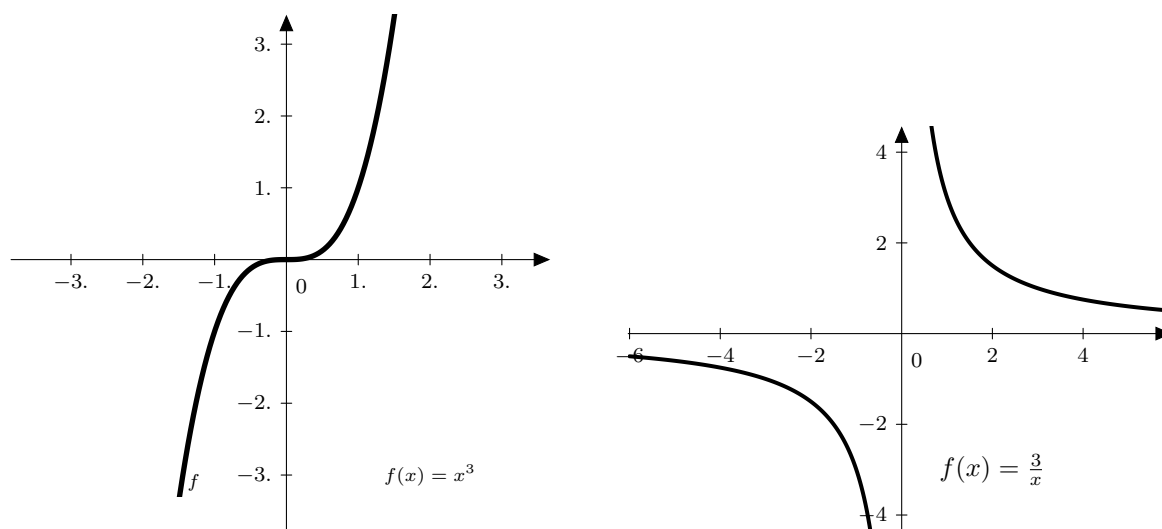
Si anéssim més anys endarrera veuríem la mateixa tendència amb la gran immigració dels anys 60?

5.6.1 Continuitat

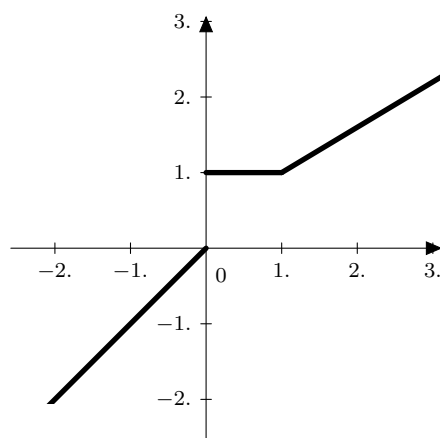
El concepte de continuïtat es pot definir dient que una funció és **contínua** si pots fer el traç de la seva gràfica sense aixecar el llapis del paper.

Si una funció no és contínua en un punt $x = a$, direm que és discontinua en $x = a$. Les següents funcions podem veure diferents casos del que estem parlant. Per exemple, la primera gràfica $f(x) = x^3$ no cal aixecar en cap moment el llapis del paper per poder-la dibuixar, o el que és el mateix, no tenim cap problem en cap valor de x on a més, tenim que el domini és tot $\mathbb{R}$. En aquest cas direm que la funció és contínua en tot $\mathbb{R}$.

En canvi, en la segona gràfica, $f(x) = \frac{3}{x}$, tenim problemes en $x = 0$ que no és el domini, però a més a més, es veu com per poder dibuixar-la, si comencem de l'esquerra, al arribar a 0, ens cal aixecar el llapis del paper per poder continuar el dibuix. En aquest cas, direm que la funció és discontinua en $x = 0$ o que és contínua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



En canvi en aquest tercer exemple, també veiem que tot i que el domini sembla que sigui tots els nombres reals, quan arribem al 0, ens cal aixecar el llapis del paper, per tant, també direm que és discontinua en $x = 0$, o el que és el mateix, que la funció és contínua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



5.6.2 Punts d'intersecció amb els eixos

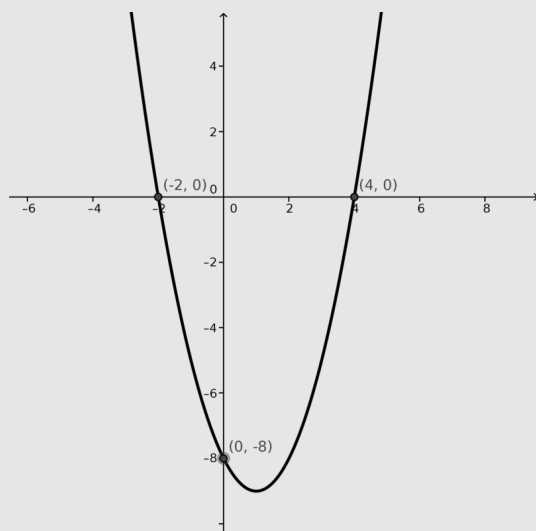
Buscarem tots els punts en que la funció talla els eixos. Ens caldrà distingir si els talls són amb l'eix de les abscisses (eix OX) o l'eix de les ordenades (eix OY). La gràfica tallarà l'eix de les ordenades, com a màxim, en un sol punt. Perquè com a funció que és, un sol valor de x no pot tenir dos valors d' y . En canvi, l'eix de les abscisses el pot tallar tants punts com calgui. No podem definir un màxim.

Per determinar els punts de tall de la gràfica $y = f(x)$ amb els eixos ens caldrà calcular els talls segons els eixos:

- **Eix d'abscisses** Per buscar els punts de tall amb l'eix d'abscisses, ens cal resoldre l'equació amb x següent: $f(x) = 0$. Si l'equació no té solució, llavors la gràfica no talla l'eix OX .
- **Eix d'ordenades** El punt de tall amb l'eix d'ordenades és molt més senzill. Només cal buscar els valors de la y tal que, la $x = 0$. Per tant, ens cal calcular $f(0)$. Si $x = 0$ no pertany al domini de la funció, llavors direm que la funció no talla l'eix d'ordenades.

En els següents exemples ho podem veure.

Exemple 5

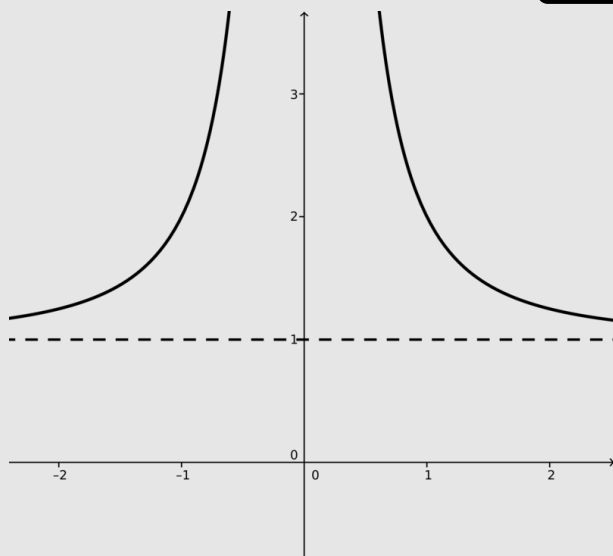


$$f(x) = (x+2)(x-4)$$

En aquest exemple, per trobar els punts de tall

- **Eix Abscisses** Quan $y = 0$, per tant,
 $y = (x+2)(x-4) = 0 \rightarrow x = -2, x = 4$
 Per tant, són els punts $(-2, 0)$ i $(4, 0)$.
- **Eix d'Ordenades** Quan $x = 0$, per tant,
 $f(0) = (0+2)(0-4) = -8$.
 Per tant, el punt $(0, -8)$.

Exemple 6

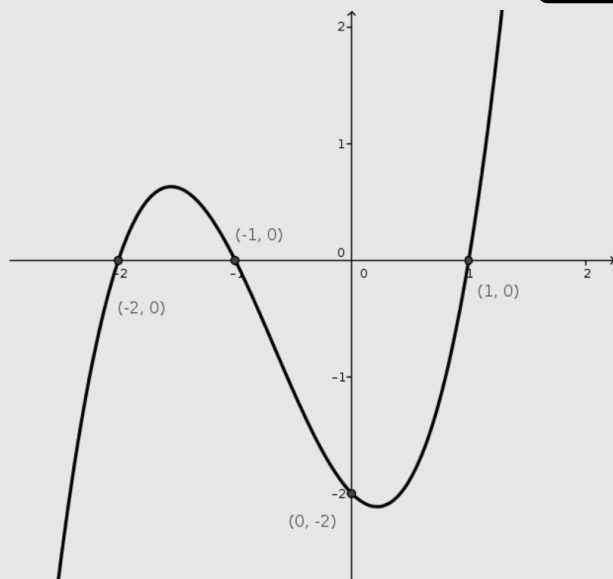


$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

En aquest exemple, per trobar els punts de tall

- **Eix Abscisses** Quan $y = 0$, per tant,
 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$
 Per tant, no té solució real i llavors no talla l'eix de les x 's.
- **Eix d'Ordenades** Quan $x = 0$, però
 $x = 0$ no està en el domini de la funció, per tant, tampoc talla l'eix de les y 's.

Exemple 7



$$f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$$

En aquest exemple, per trobar els punts de tall

- **Eix Abscisses** Quan $y = 0$, per tant,
 $y = (x+2)(x+1)(x-1) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = -2, -1$ i 1 .
 Per tant, són els punts $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.
- **Eix d'Ordenades** Quan $x = 0$, per tant,
 $f(0) = (0+2)(0+1)(0-1) = -2$.
 Per tant, el punt $(0, -2)$.

5.6.3 Signe

Per determinar les regions per on podem trobar la gràfica de la funció, podem utilitzar una altra eina: calcular el signe de la funció $f(x)$.

Si la $f(x) > 0$ direm que la funció és positiva i es dibuixa per sobre l'eix OX . I, en canvi, si $f(x) < 0$, llavors la funció és negativa i es dibuixa per sota l'eix OY .

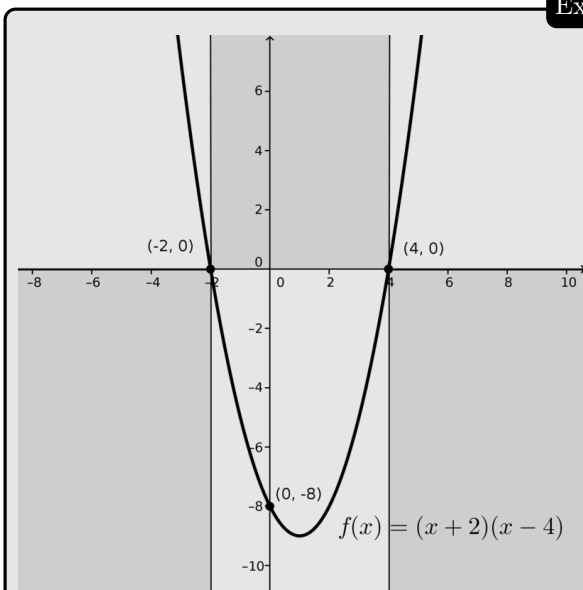
Si la funció $f(x)$ és contínua, llavors podem saber els punts de canvi de signe de la funció, calculant els punts de tall amb l'eix de les abscisses, és a dir, buscant els punts x tal que $f(x) = 0$.

Si la funció $f(x)$ no és contínua, llavors la funció pot canviar de signe en els punts de discontinuïtat, en aquests casos, caldrà estudiar tots els punts, tant els que $f(x) = 0$, com els punts de discontinuïtat.

Estudiarem el signe de la funció, igualant la seva expressió algebraica a zero, i buscarem els punts de canvi de signe. Escriurem en una recta real els valors de x quan la funció és zero i afegirem els punts de discontinuïtat. Estudiarem el signe de les zones delimitades per els punts anteriors i comprovarem el signe de la funció en un sol punt de cada zona. I el resultat el donarem expressant els intervals on la funció és positiva i els intervals on és negativa.

Observeu com estudiem el signe a les dues funcions següents, una funció contínua i una de discontinua en un punt.

Exemple 8



$$f(x) = (x+2)(x-4)$$

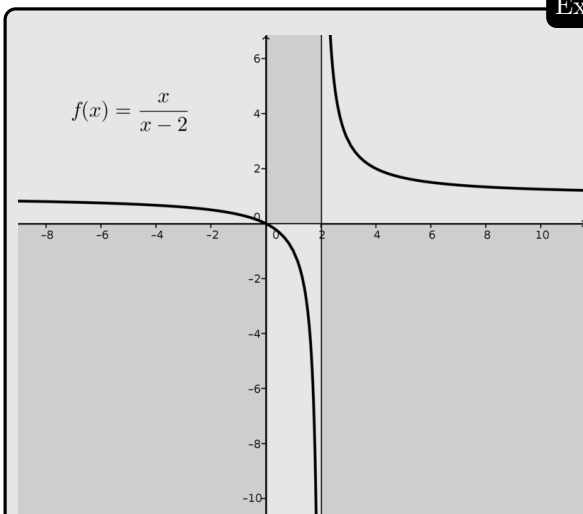
En aquest exemple, com que és un polinomi i és funció contínua només ens canviarà de signe en els punts de tall amb l'eix de les x 's. Per tant, quan $f(x) = 0$. En aquest cas, passa quan $x = -2$ i $x = 4$.

Pintem de gris fosc, les zones on no hi ha funció perquè la funció té signe contrari.

$$f(x) > 0 \longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

$$f(x) < 0 \longrightarrow x \in (-2, 4)$$

Exemple 9



$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Per exemple, la funció $f(x) = \frac{x}{x-2}$ té un punt de discontinuïtat, $x = 2$. I canvia de signe quan $f(x) = 0$, és a dir, quan $x = 0$. Per tant, cal estudiar el signe de la funció tenint en compte que pot canviar de signe només en $x = 0$ i $x = 2$.

També pintem de gris fosc, les zones on no hi ha funció.

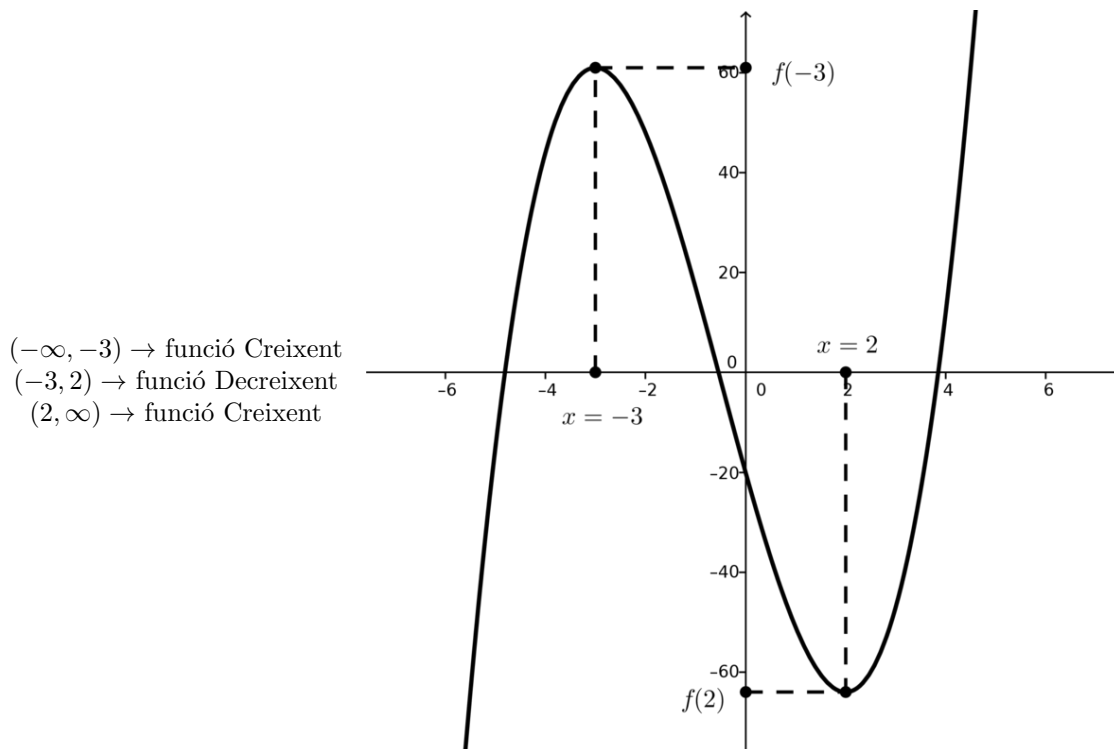
$$f(x) > 0 \longrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

$$f(x) < 0 \longrightarrow x \in (0, 2)$$

5.6.4 Creixement i decreixement. Màxims i mínims

Direm que una funció $f(x)$ és creixent en un interval si per qualsevol parella de punts x_1 i x_2 tal que $x_1 < x_2$ es compleix que sempre $f(x_1) < f(x_2)$. I, a l'inversa, obtenim una funció decreixent, és a dir, que si per qualsevol parella de punts, tal que $x_1 < x_2$ es compleix que $f(x_1) > f(x_2)$.

Si estudiem la següent gràfica, podem observar els diferents intervals de creixement i decreixement.



En $x = -3$ hi ha un canvi de creixement a decreixement. En aquest punt direm que $(-3, f(-3))$ és un **màxim relatiu**.

En canvi, en $x = 2$, la gràfica passa de ser decreixent a creixent, llavors direm que $(2, f(2))$ és un **mínim relatiu**.

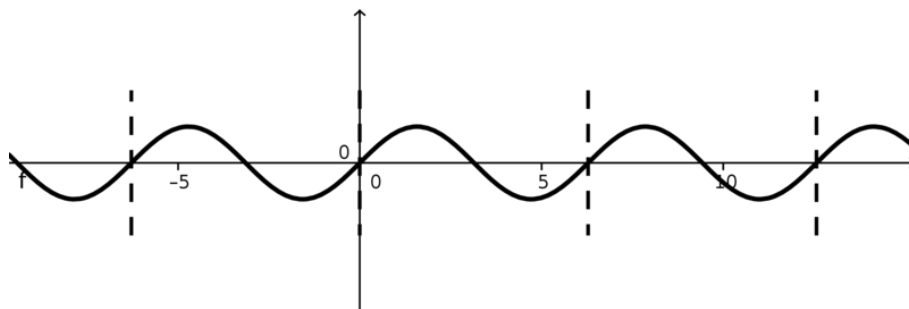
En el cas que el mínim relatiu, sigui un mínim de la funció per a qualsevol valor de x , llavors parlarem de **mínim absolut**. De la mateixa manera per **màxims absoluts**.

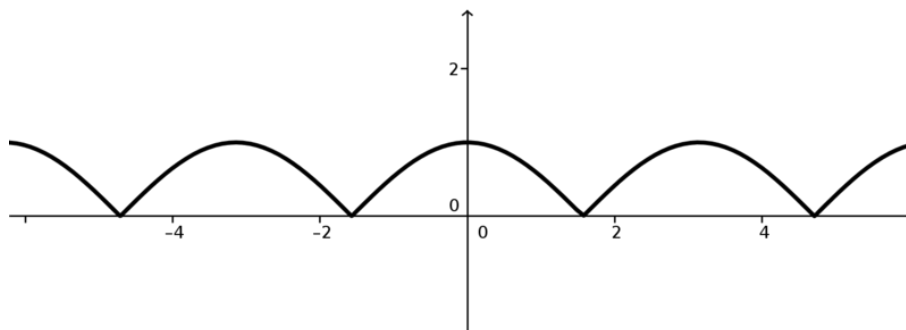
5.6.5 Periodicitat

A la natura podem trobar diferents fenòmens que es van repetint al llarg del temps. Per exemple, si pensem en les ales d'un ocell en el moviment que descriu quan vola, tenim un moviment que es va repetint. De la mateixa manera si pensem amb el moviment de la Lluna al voltant de la Terra, observem que és un moviment periòdic, que es va repetint al llarg del temps. En aquests casos, si definim el moviment amb una funció, diem que la funció és **periòdica**. Per tant, definirem funció periòdica, a aquella funció, per la qual existeix un nombre real $T > 0$, tal que, per a qualsevol valor de x , es compleix que

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

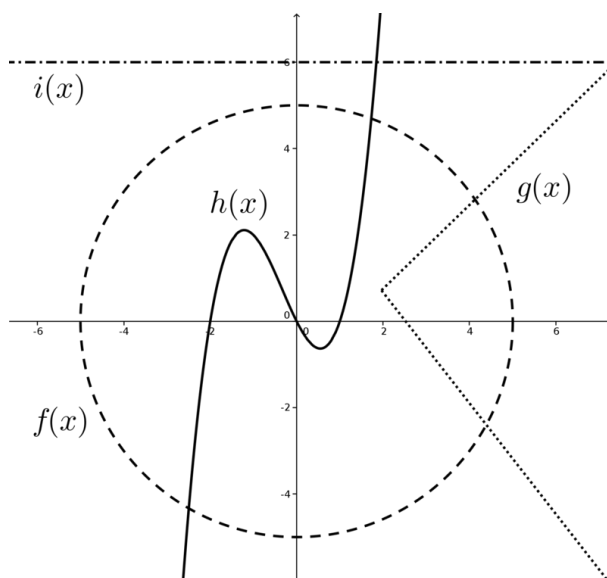
Com exemples tenim les funcions trigonomètriques com el sinus $y = \sin(x)$ o el valor absolut del cosinus:





5.7 Exercicis

- (1) Representant amb x la variable independent i amb $f(x)$ la variable dependent, escriu l'expressió algebraica de la funció que fa correspondre:
 - (a) A la longitud del costat d'un quadrat, la mesura del seu perímetre.
 - (b) Al diàmetre d'una circumferència, l'àrea del cercle que limita.
 - (c) A una quantitat de diners invertida al 4% d'interès durant 3 anys, els interessos que produeix.
 - (d) D'una aixeta que raja $5\frac{1}{s}$, els segons que passen respecte la quantitat d'aigua que hem acumulat.
 - (e) A l'àrea d'un quadrat, la longitud del seu costat.
- (2) L'expressió algebraica d'una funció és $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Troba la imatge de -1 , 3 i 5 . I l'antiimatge de -5 , -1 i 4 .
- (3) Si tenim la funció $f(x) = \frac{5}{x}$, hi ha algun nombre que no tingui imatge? I n'hi ha algun que no tingui antiimatge?
- (4) De les següents gràfiques indica quina no és una funció.



- (5) Digues el domini de les següents funcions:

(a) $f(x) = 3 - 2x$

(c) $f(x) = x^2 - 4x - 12$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

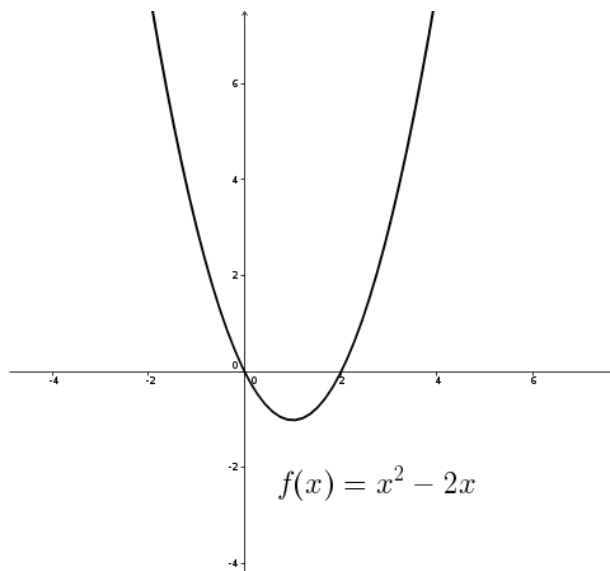
(d) $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

- (6) Un dipòsit d'aigua de 80l es va buidant amb una aixeta a raó de $12 \frac{L}{min}$. Representa gràficament la funció que relaciona el temps en minuts i els litres que queden en el dipòsit. Digues quin és el seu domini i recorregut.
- (7) Sigui una funció que ens diuen que el seu domini és $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. I sabem que té la forma següent:

$$f(x) = \frac{x+7}{x+a}$$

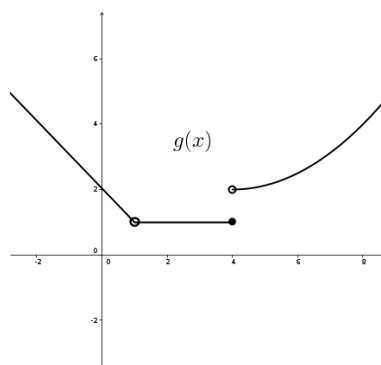
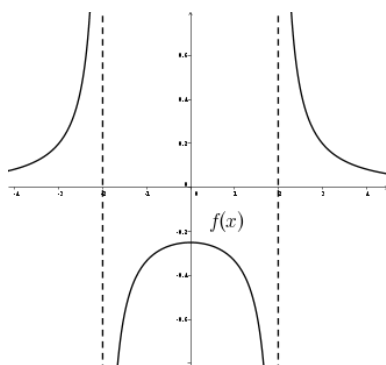
Quin és el valor d' a ?

- (8) Sabem que el domini d'una funció amb expressió algebraica $f(x) = 16 - 2x$ és $D_f = [0, 8]$. Fes la representació gràfica i calcula'n el recorregut.
- (9) Sabent que $f(a) = \frac{1}{2}$ i $g(a) = \frac{3}{4}$, troba el valor de $(f+g)(a)$, $(f \cdot g)(a)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$ i $\left(\frac{g}{f}\right)(a)$
- (10) Donades les funcions $f(x) = x^2 - 6$ i $g(x) = x - 3$, digues quina és l'expressió algebraica de $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ i $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$
- (11) Donades les funcions $f(x) = 3x - 5$ i $g(x) = x^2 - 4$, per a quin valor d' x no existeix la funció $\frac{f}{g}$ ni $\frac{g}{f}$?
- (12) Si definim la funció f com la funció que fa correspondre qualsevol número al seu quadrat, i la funció g com la funció que fa correspondre un número al seu oposat. Calcula el valor $(f \circ g)(3)$, $(g \circ f)(-2)$ i $(f \circ g)(x)$.
- (13) Calcula quina és l'expressió algebraica de les funcions $f \circ g$ i $g \circ g$ si $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 - 4$.
- (14) Construeix una taula de valors de la funció $f(x) = x^2$ i realitza'n la seva representació gràfica. Comprova si existeix la seva funció inversa, i si és així, troba la seva expressió algebraica.
- (15) A partir de la gràfica següent digues si existiria la seva funció inversa i raona la teva resposta.

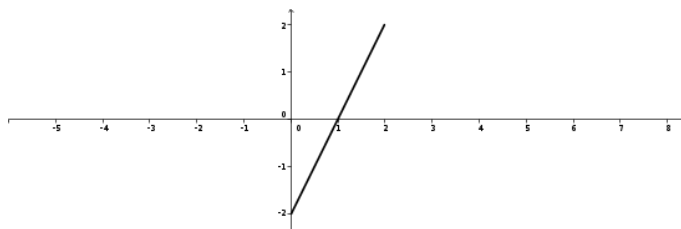


- (16) Té inversa la funció $f(x) = x^4$? Raona la teva resposta.
- (17) Donada la funció $f(x) = 2x + 3$ calcula l'expressió algebraica de la seva inversa i representa gràficament f i f^{-1} . Comprova que són simètriques respecte algun eix.
- (18) Comprova que la funció inversa de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ és ella mateixa.

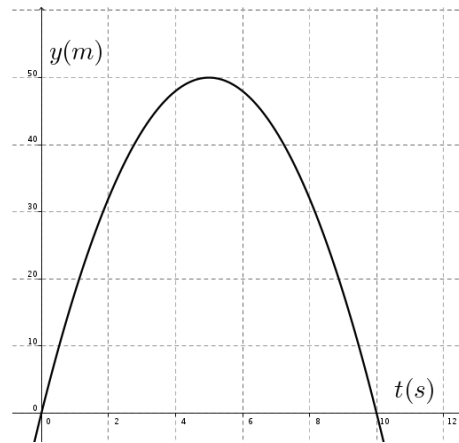
- (19) Hem comprovat que la funció $f(x) = x^2$ no té inversa. Tot i així, segons el fenomen a què s'apliqui, és possible que la tingui. És el que succeeix, per exemple, en el cas que x representi la longitud del costat d'un quadrat i $f(x)$, la mesura de la seva superfície. Intenta justificar aquesta afirmació.
- (20) Suposem que establir una trucada telefònica costa 0,15€ i que, a partir d'aquest moment, el preu és de 0,05€ per minut. Escriu l'expressió de la funció que ens proporciona l'import $f(x)$ en euros de la trucada en funció de la seva durada x en minuts. Quina és l'expressió algebraica de la funció f^{-1} ? Què indica aquesta funció?
- (21) Dibuixa de manera aproximada la gràfica d'una funció f que compleixi les condicions següents:
- Que el domini i el recorregut siguin tots els nombres reals.
 - Que presenti una màxim relatiu en el punt $(-2, 4)$ i un mínim relatiu en el punt $(3, -5)$.
- (a) En quants punts talla la gràfica de la funció l'eix abscisses?
- (b) I el d'ordenades?
- (c) Indica els intervals de creixement i de decreixement de la funció.
- (22) Assenyalala els punts de discontinuïtat de les següents funcions:



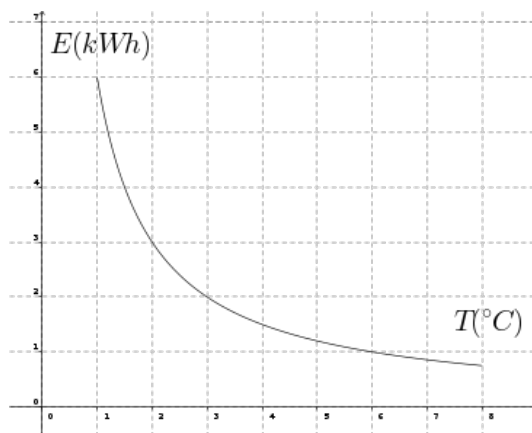
- (23) Siguin les funcions $f(x) = 4x - 8$ i $g(x) = x^2 - 7x - 8$ troba els punts d'intersecció de cada funció amb els eixos de coordenades.
- (24) La següent figura és la gràfica d'una funció en l'interval $[0, 2]$. Si ens diuen que la funció és periòdica de període $T = 2$, dibuixa la resta de la funció.



- (25) A la següent figura hem representat la gràfica de la funció que proporciona l'altura y que assoleix una pilota llançada des de terra verticalment cap amunt en el buit amb una certa velocitat inicial. L'altura es dibuixa en funció del temps t , que és el temps que ha transcorregut des de que s'ha llençat la pilota.



- (a) Indica el domini i el recorregut d'aquesta funció.
- (b) Quina és l'altura màxima a què arriba la pilota? Quanta estona triga a assolir-la?
- (c) Després de 4,5s de ser llençada, està en trajectòria ascendent o descendent?
- (d) Quanta estona triga a tornar al punt de sortida?
- (26) Imagina que la pilota de l'exercici anterior no perd energia en el moment de l'impacte amb el terra i surt rebotada amb la mateixa velocitat amb què es va llençar inicialment. Suposant que aquesta situació es repeteixi cada vegada que la pilota reboti:
- (a) Dibuixa la gràfica de la funció $y = f(t)$ corresponent a l'instant en què la pilota topa amb el terra per tercera vegada.
- (b) És una funció periòdica?
- (c) Si la resposta anterior és afirmativa, quin és el valor del període?
- (d) Si és periòdica, quines conclusions generals en podem treure?
- (27) El manual d'usuari d'una nevera inclou un gràfic que indica el consum diari d'energia elèctrica en funció de la temperatura interior, que es controla mitjançant un termòstat. Suposarem que la temperatura de la cuina es manté constant.



- (28) Quin és domini de les següents funcions:

(a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$

(c) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$

(b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$

(d) $x^2 - 15x + 4$

(e) $x^{101} - 2x^{99} + 3x$

- (29) Dibuixa una gràfica d'una funció contínua que verifica les condicions següents:

- Que talli els eixos de coordenades en els punts $(-2, 0)$, $(1, 0)$ i $(3, 0)$

- Que presenti un màxim relatiu en el punt $(-1, 3)$ i un mínim relatiu en el punt $(2, 0)$.

Determina quins són els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció.

Si la funció no fos contínua, què canviaria en el problema?

(30) Considera les funcions $f(x) = 2x + 6$ i $g(x) = x^2 - 4$.

(a) Quins valors d' x no pertanyen al domini de la funció $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$?

(b) I al de la funció $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

(31) Determina els punts d'intersecció de les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 - 4$ i $g(x) = 4x + 1$.
Resol el problema analíticament i gràficament.

Capítol 6

Funcions II

6.1 Funció Lineal

Com el seu nom indica, la funció de proporcionalitat directa o **funció lineal** relaciona dues magnituds directament proporcionals, és a dir, tals que el seu quocient és constant. Aquest quocient rep el nom de **constant de proporcionalitat**.

De la definició es dedueix que l'equació de la funció lineal és:

$$y = m \cdot x$$

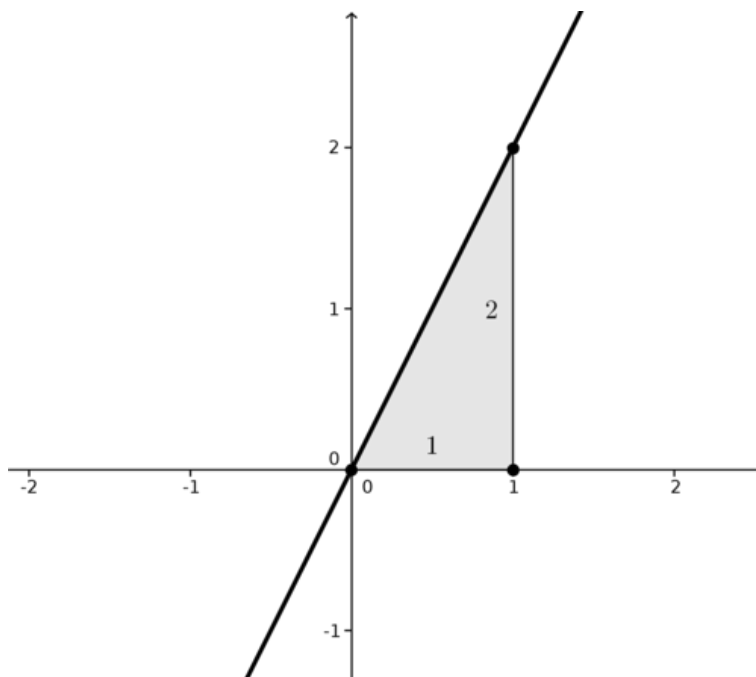
on m és la constant de proporcionalitat.

La gràfica d'aquesta funció és sempre una línia recta que passa per l'origen (si $x = 0$, llavors $y = 0$), creixent si m és positiva, decreixent si m és negativa i tant més a prop de la vertical com major sigui el valor absolut de m . Per aquest motiu, m també s'anomena pendent de la recta.

En resum, les equacions del tipus $y = m \cdot x$ representen funcions lineals o de proporcionalitat directa. Si $m > 0$ és creixent. Si $m < 0$ és decreixent. Per la seva part, la constant de proporcionalitat és una mesura de la inclinació de la recta.

L'anomenem **pendent**.

En el següent exemple, podem observar la gràfica d'una funció lineal amb constant de proporcionalitat igual a 2: $m = \frac{2}{1} = 2$, per cada unitat que avancem en la direcció de l'eix de les x 's, augmentem en dos unitats, l'eix de les y 's.



Exemple Resolt 1

Han arribat les rebaixes i en una tenda han decidit classificar tots els seus productes en tres lots A , B i C , als que aplicaran el 20%, el 30% i el 50% de descompte, respectivament.

Si anomenem x al preu inicial i y el preu final, les taules que veus a sota mostren els canvis de preu de diversos productes dels diferents lots:

Lot A: 20%	
x	y
375,00€	300,00€
452,00€	361,60€
126,00€	100,80€
180,00€	144,00€
412,00€	329,60€

Lot B: 30%	
x	y
213,00€	149,10€
198,00€	138,60€
321,00€	224,70€
202,00€	141,40€
135,00€	94,50€

Lot C: 50%	
x	y
297,00€	148,50€
561,00€	280,50€
319,00€	159,50€
56,00€	28,00€
87,00€	43,50€

Analitzarem cada cas dividint el preu rebaixat pel preu inicial.

Lot A: 20%		
x	y	y/x
375,00€	300,00€	0,8
452,00€	361,60€	0,8
126,00€	100,80€	0,8
180,00€	144,00€	0,8
412,00€	329,60€	0,8

Com pots observar, en el primer lot tots els quocients són iguals. Com hem vist, això significa que el preu rebaixat és **directament proporcional** al preu inicial y , en aquest cas, la constant de proporcionalitat és 0,8. Per tant, per al lot A tenim: $y = 0,8 \cdot x$.

Lot B: 30%		
x	y	y/x
213,00€	149,10€	0,7
198,00€	138,60€	0,7
321,00€	224,70€	0,7
202,00€	141,40€	0,7
135,00€	94,50€	0,7

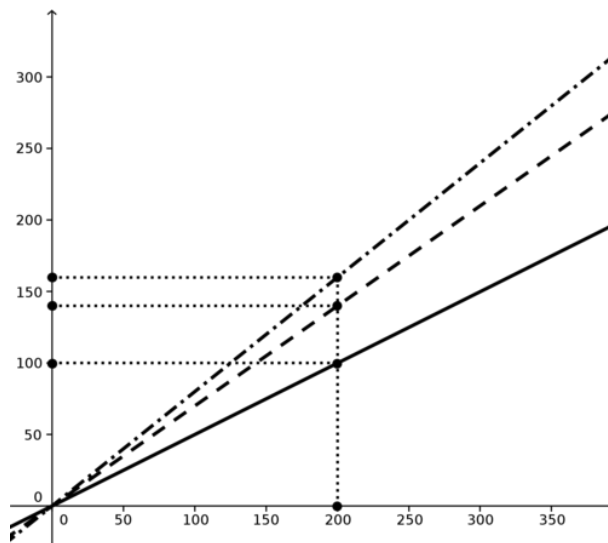
Lot C: 50%		
x	y	y/x
297,00€	148,50€	0,5
561,00€	280,50€	0,5
319,00€	159,50€	0,5
56,00€	28,00€	0,5
87,00€	43,50€	0,5

En els altres dos lots succeeix de forma semblant, però en cada cas la constant de proporcionalitat és diferent de manera que:

Per al lot B tenim: $y = 0,7 \cdot x$

Per al lot C tenim: $y = 0,5 \cdot x$

En qualsevol cas totes tenen la forma: $y = m \cdot x$. Si analitzem les gràfiques de les tres funcions, podem veure que les tres són **línies rectes que passen per l'origen**, amb major inclinació com més gran és la constant de proporcionalitat. Si prenem el valor $x = 200$ € observem que en el lot $A \Rightarrow y = 160,00$ €; en el lot $B \Rightarrow y = 140,00$ € i en el lot $C \Rightarrow y = 100,00$ €.



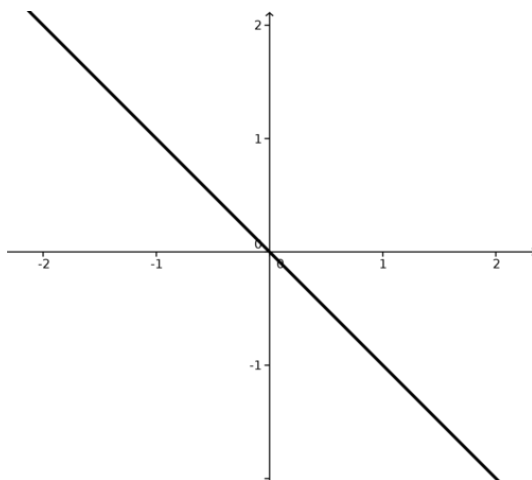
Exemple Resolt 2

Esbrina si les funcions definides per les dades de les taules adjuntes són o no són funcions lineals. En cas afirmatiu, determina el seu pendent i dibuixa la seva gràfica: Per determinar si és lineal, calculem tots els quocients entre els valors de y i de x .

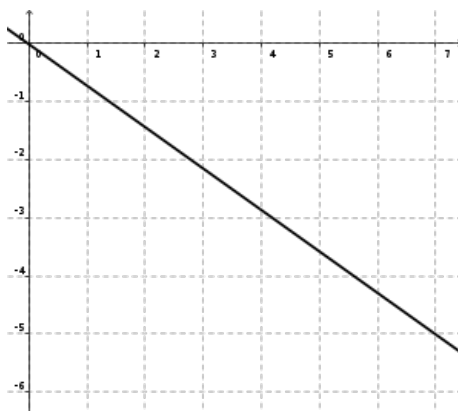
x	y	y/x
-3	4,55	-1,52
-1	0,51	-0,51
1	0,51	0,51
3	4,55	1,52
5	12,64	2,53

x	y	y/x
-3	3	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
3	-3	-1
5	-5	-1

En el primer cas, com que no tots els quocients són iguals, no es tracta d'una funció de proporcionalitat directa i, per tant, no és una funció lineal. En canvi, en el segon cas, els quocients són tots iguals, per tant, les magnituds que representen x i y són directament proporcionals i la funció que les relaciona sí és lineal. El pendent és la constant de proporcionalitat $m = -1$ i la gràfica és:

**Exemple Resolt 3**

Determina el pendent i l'equació de la funció de la gràfica adjunta:



Per ser una recta que passa per l'origen és una funció lineal i la seva equació és de la forma $y = m \cdot x$. Com que és decreixent, m és negativa.

Per trobar m , localitzem algun punt de la recta amb les dues coordenades enteres. En aquest cas, el punt pot ser $(7, -5)$. El pendent es calcula dividint la segona coordenada per la primera, així doncs, $m = -\frac{5}{7}$ i l'equació de la funció és

$$y = -\frac{5}{7}x$$

6.2 Funció afí

Podem considerar una funció afí com una funció lineal a la que se li han aplicat certes condicions inicials. Encara que no representa a dues magnituds directament proporcionals, existeix entre elles certa proporcionalitat com pots veure a les imatges adjuntes. L'equació de la funció afí és:

$$y = m \cdot x + n$$

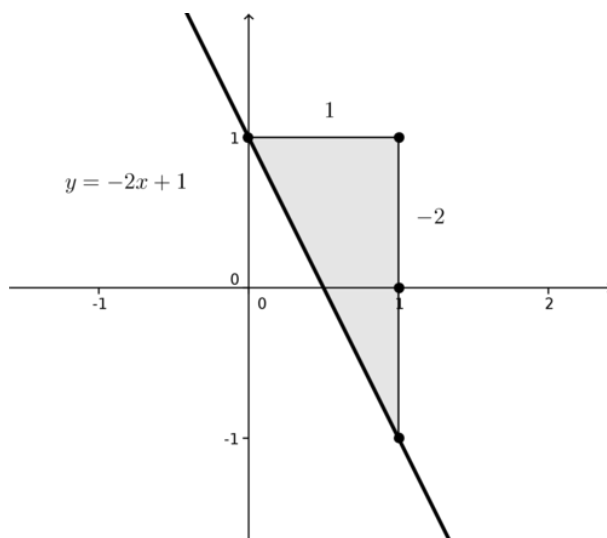
on m segueix representant aquesta certa proporcionalitat i n representa les condicions inicials. La seva gràfica és una línia recta que talla l'eix y en el punt n (si $x = 0$, llavors $y = n$). Per aquest motiu també es diu que n és l'ordenada en l'origen de la recta. La m té el mateix significat que en les funcions lineals.

En resum, les equacions del tipus $y = mx + n$ representen funcions afins.

Si $m > 0$ és creixent.

Si $m < 0$ és decreixent.

El pendent es calcula ara respecte a l'ordenada a l'origen. En el cas de la gràfica següent obtenim que el pendent és -2 .



Exemple Resolt 4

En una empresa de lloguer de vehicles cobren 50€ pel contracte de lloguer més 0,20€ per quilòmetre recorregut. Volem trobar una equació que ens permeti calcular amb facilitat el preu d'un lloguer en funció de la distància recorreguda:

L'empresa ens proporciona la taula següent perquè ens puguem fer una idea del preu.

x (km)	y (€)
0	50,00€
100	70,00€
200	90,00€
300	110,00€
400	130,00€

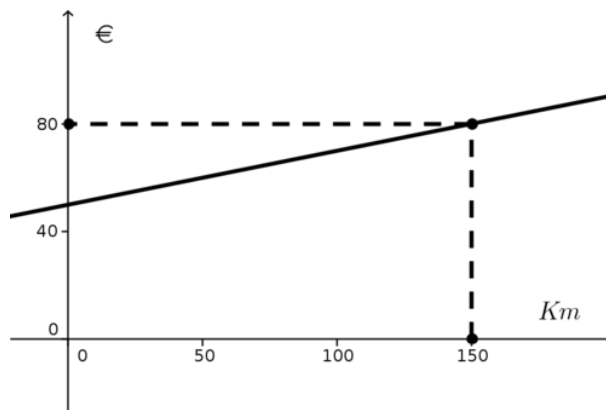
El primer que observem és que si dupliquem el nombre de km, el preu no es duplica: **les magnituds no són directament proporcionals**. Si analitzem amb més detall la situació, ens adonem que si descomptem en cada cas el valor inicial i dividim el preu per la distància obtenim sempre el mateix quocient, és a dir, **el preu (descomptat el cost inicial) si que és directament proporcional a la distància**. El valor obtingut és la constant de proporcionalitat com en el cas anterior:

x (km)	y (€)	$y - 50$	$(y - 50)/x$
0	50,00€		
100	70,00€	20,00€	0,20
200	90,00€	40,00€	0,20
300	110,00€	60,00€	0,20
400	130,00€	80,00€	0,20

Per tant, $y - 50 = 0,2 \cdot x$, s'on es dedueix que:

$$y = 0,2 \cdot x + 50$$

que té la forma $y = mx + n$. Igual que les funcions lineals, la m representa el pendent i ara la n representa el punt on la recta talla l'eix de les y tal i com es pot veure en el següent gràfic:



6.3 Interpolació Lineal

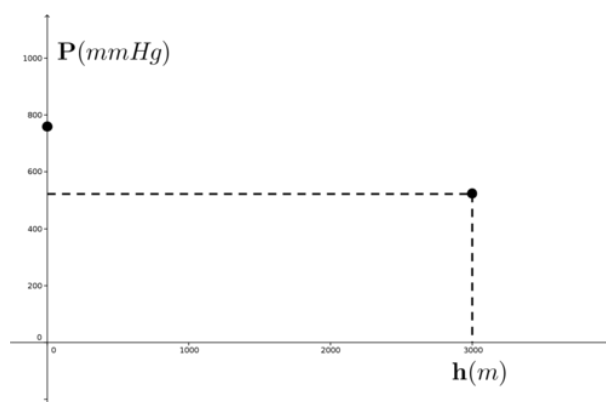
La pressió atmosfèrica varia amb l'altitud respecte al nivell del mar. Concretament, a mesura que l'altitud augmenta, la pressió atmosfèrica disminueix.

La següent taula ens indica els valors de la pressió atmosfèrica a nivell del mar i a una altitud de 3000 metres.

h(m)	0	3 000
P(mmHg)	760	523

Quin valor podem estimar per a la pressió atmosfèrica en un punt situat a 1000 metres d'altitud?

Si representem gràficament els valors de la taula, obtenim dos punts.



Ens diuen que la pressió atmosfèrica disminueix amb l'altitud, però no ens informen de com es produeix aquesta disminució, és a dir, no podem dibuixar la gràfica de la funció $P = f(h)$ que correspon a l'interval $[0, 3000]$ perquè no sabem de quina funció es tracta.

Per resoldre situacions d'aquest tipus s'utilitza un procediment conegut amb el nom d'**interpolació lineal**. Si suposem que la pressió disminueix linealment amb l'altitud, la funció $P = f(h)$ serà lineal i la seva expressió algebraica serà del tipus $f(h) = mh + n$ o, el que és el mateix, $P = mh + n$.

Així, estem en condicions de trobar l'expressió algebraica d'aquesta funció, ja que coneixem les coordenades de dos dels seus punts: $(0, 760)$ i $(3000, 523)$. Per trobar m i n resollem el sistema:

$$\begin{cases} 760 = m \cdot 0 + n \\ 523 = m \cdot 3000 + n \end{cases}$$

La solució és $m = -\frac{79}{1000}$ i $n = 760$.

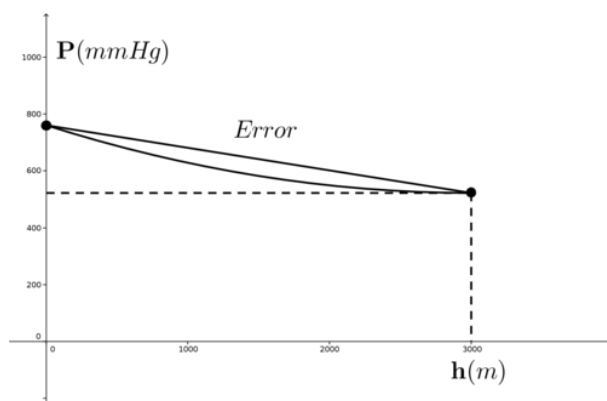
Per tant, l'equació de la funció que hem considerat és:

$$f(h) = -\frac{79}{1000}h + 760$$

Si la disminució de la pressió atmosfèrica amb l'altitud fos lineal, el valor d'aquesta pressió a $1000m$ seria de:

$$f(1000) = -\frac{79}{1000} \cdot 1000 + 760 = 681 \implies P = 681 \text{ mmHg}$$

El més probable és que aquesta disminució no sigui lineal i, per tant, que el valor que hem trobat no sigui l'exacte. Per aquest motiu, el problema ens demana una **estimació** del valor de la pressió atmosfèrica a $1000m$ d'altitud. Si observem la següent gràfica, podem fer-nos una idea gràfica de l'error que cometem quan unim els dos punts mitjançant un traç rectilini, en lloc de fer-ho amb un traç curvilini. Observa que, en aquest cas, l'error que cometem és per excés i no per defecte.



En general, si a partir d'una taula o una gràfica ens donen dos parells de valors, (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , corresponents a dues magnituds x i y que depenen una de l'altra, podem estimar mitjançant la interpolació lineal el valor y_0 corresponent a un valor $x_0 \in (x_1, x_2)$. N'hi ha prou a determinar l'expressió algebraica de la funció lineal $f(x) = mx + n$ la gràfica de la qual passa pels punts de coordenades (x_1, y_1) i (x_2, y_2) i trobar $f(x_0)$.

Exemple Resolt 5

En una habitació que es troba a una temperatura de $20^\circ C$ hem retirat del foc mig litre d'aigua bullint. Mesurem la temperatura de l'aigua després de 10, 30 i 50 minuts, i obtenim les dades de la taula següent:

Temps (min)	10	30	50
Temperatura ($^\circ C$)	85	50	36

Estima, per interpolació lineal, la temperatura de l'aigua 25 i 35 minuts després d'haver-la retirat del foc.

Observa que es verifica $10 < 25 < 30$. Per tant, la funció que ens determina la variació lineal de temperatura T de l'aigua en funció del temps t transcorregut haurem de trobar-la per a l'interval $[10, 30]$, és a dir, a partir dels parells de valors $(10, 85)$ i $(30, 50)$.

Si la representem com a $f(t) = mt + n$, es verifiquen alhora aquestes igualtats:

$$\begin{cases} 85 = 10m + n \\ 50 = 30m + n \end{cases}$$

La solució d'aquest sistema és $m = -\frac{7}{4}$ i $n = \frac{205}{2}$.
La funció lineal d'interpolació és $f(t) = -\frac{7}{4}t + \frac{205}{2}$.

Per tant:

$$f(25) = -\frac{7}{4} \cdot 25 + \frac{205}{2} = 58,75 \longrightarrow T = 58,75^\circ C$$

Podem estimar que, després de 25 minuts, la temperatura de l'aigua s'aproparà a $59^\circ C$.

Repetim el procés per a $t = 35 \text{ min}$. En aquest cas, $30 < 35 < 50$, de manera que hem de trobar la funció

lineal d'interpolació, que representem ara per $g(t) = mt + n$, a partir dels parella de valors $(30, 50)$ i $(50, 36)$.

Procedint com en el cas anterior, obtenim;

$$g(t) = -\frac{7}{10}t + 71 \longrightarrow g(35) = 46,5 \longrightarrow T = 46,5^\circ C$$

Transcorreguts 35 minuts, la temperatura de l'aigua serà aproximadament de $46^\circ C$.

Amb les dades que tenim, podem plantejar-nos una estimació de la temperatura de l'aigua quan hagin transcorregut 80 minuts?

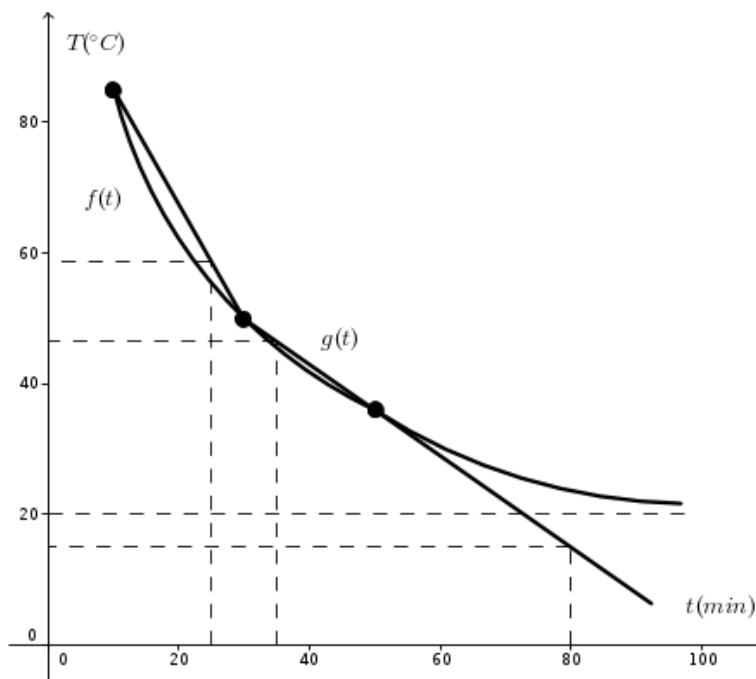
Com que el 80 no està inclòs en l'interval del temps $[10, 50]$, estimerem la temperatura de l'aigua als 80 minuts per **extrapolació**. Suposarem que a partir dels 50 minuts la temperatura segueix disminuint linealment amb el temps, de la mateixa manera que ho fa entre els 30 i els 50 minuts.

Amb aquestes consideracions, obtenim $g(80) = 15 \rightarrow T = 15^\circ C$.

Evidentment, l'estimació obtinguda no és possible. Si tenim en compte que la temperatura de l'habitació és de $20^\circ C$, la temperatura de l'aigua tendirà a estabilitzar-se al voltant dels $20^\circ C$, sense assolir mai temperatures més baixes.

Segurament, si l'extrapolació la realitzem, per exemple, per a un temps de 55 minuts, no gaire allunyat de 50, obtindrem una temperatura molt propera a la real.

A la següent gràfica hem realitzat una representació gràfica aproximada de la situació que planteja aquest exemple.



És important analitzar la validesa dels resultats obtinguts a partir d'interpolacions o extrapolacions i tenir sempre en compte totes les condicions en què es produeix el fenomen que s'estudia. Per regla general, les estimacions per extrapolació són menys fiables que les que s'obtenen per interpolació.

La interpolació lineal també s'utilitza en funcions amb expressions algèbriques complexes. Com a conseqüència de la dificultat dels càlculs que se'n deriven, els seus valors es recullen en taules. Els valors intermedis que no es troben a les taules s'estimen per interpolació lineal.

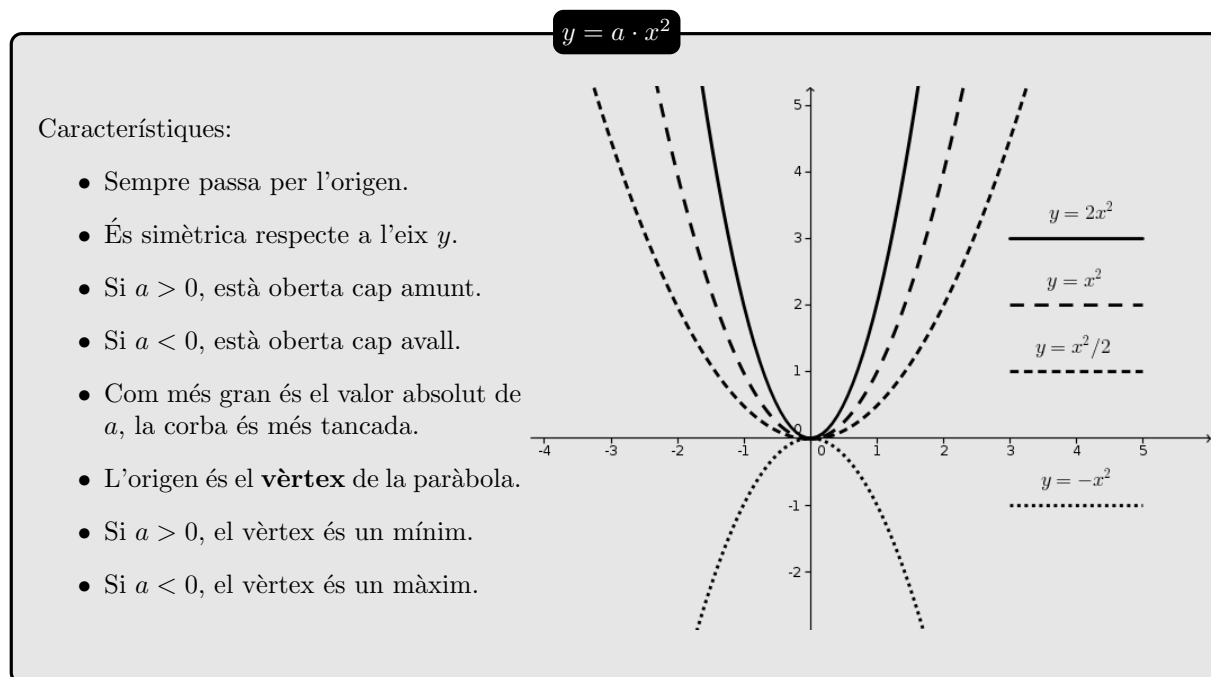
6.4 Funcions Quadràtiques

Una funció quadràtica és la que ve representada per un polinomi de segon grau (x està elevada al quadrat). L'equació de la funció quadràtica és:

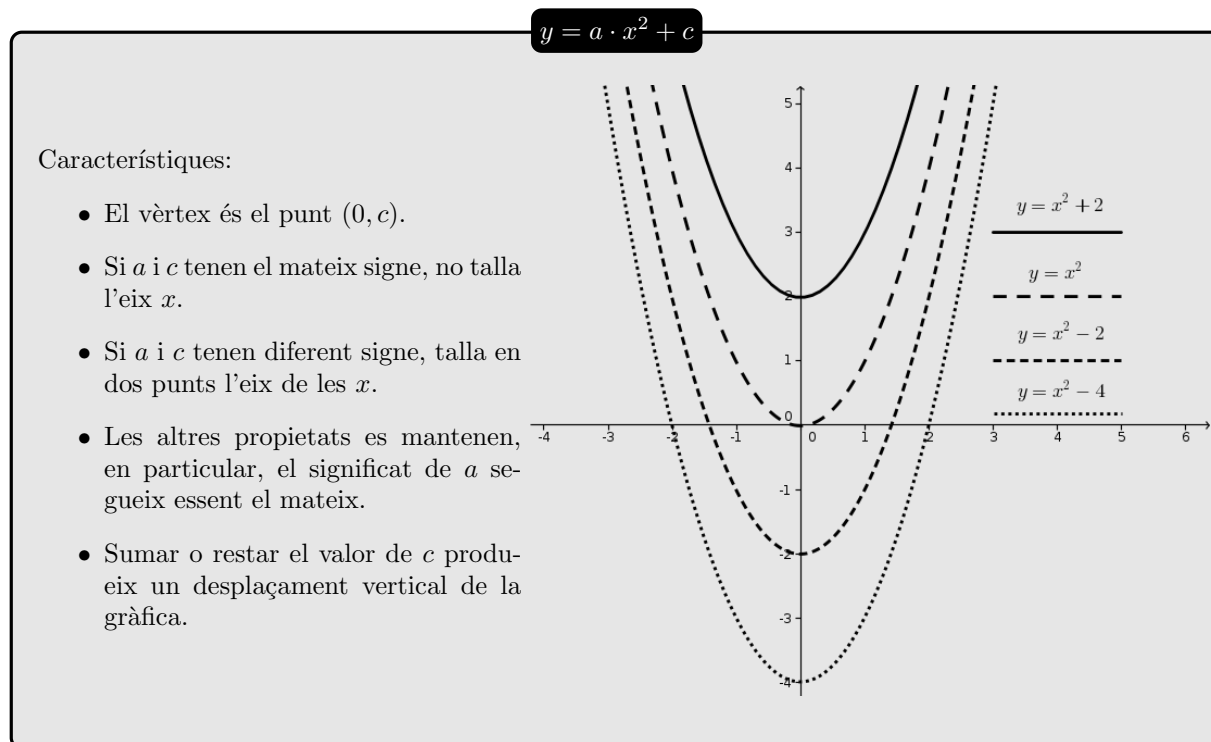
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

El significat dels coeficients a , b i c s'explica a continuació. La seva gràfica és una corba especial anomenada paràbola. Aquest tipus de corba es troba fàcilment en la vida real ja que és la corba que descriu qualsevol objecte llançat a l'aire i sotmès a la influència de la gravetat. Separarem els diferents tipus de paràboles segons els valors dels paràmetres a , b i c . Sempre tindrem en compte que $a \neq 0$ perquè si es donés el cas, no estariem parlant d'una paràbola, i obtindríem una funció afí.

6.4.1 Cas $b = c = 0$



6.4.2 Cas $b = 0$



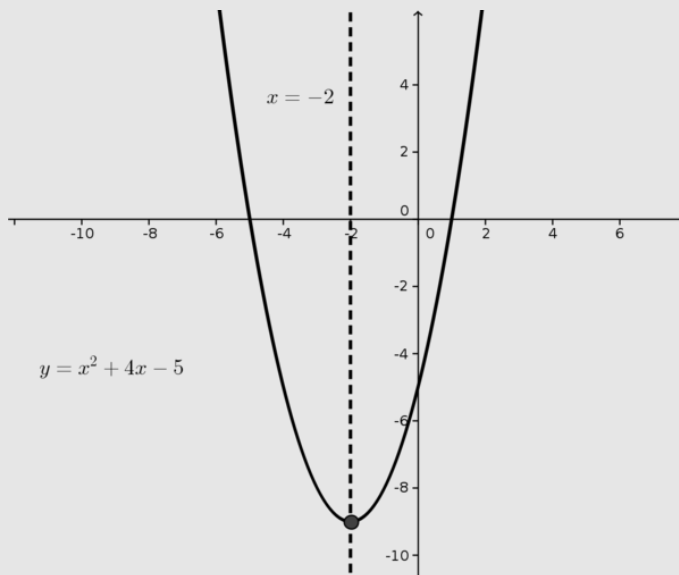
6.4.3 Cas general: $b \neq 0$ i $c \neq 0$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

Característiques:

- L'eix de simetria és $x = -\frac{b}{2a}$
- El vèrtex es troba substituint el valor anterior en l'equació
- c només ens informa del punt de tall amb l'eix de les y 's.
- Les altres propietats es mantenen.
- b representa una mesura del desplaçament horitzontal de la gràfica.

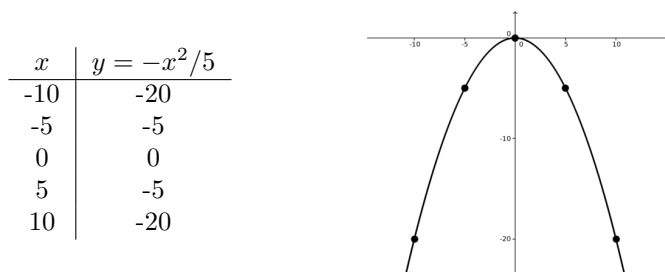


EXERCICIS RESOLTS

- (1) Dibuixa la gràfica de la funció $y = -\frac{1}{5}x^2$

Com ja sabem les funcions del tipus $y = ax^2$ són paràboles simètriques respecte a l'eix y i amb el vèrtex en l'origen de coordenades.

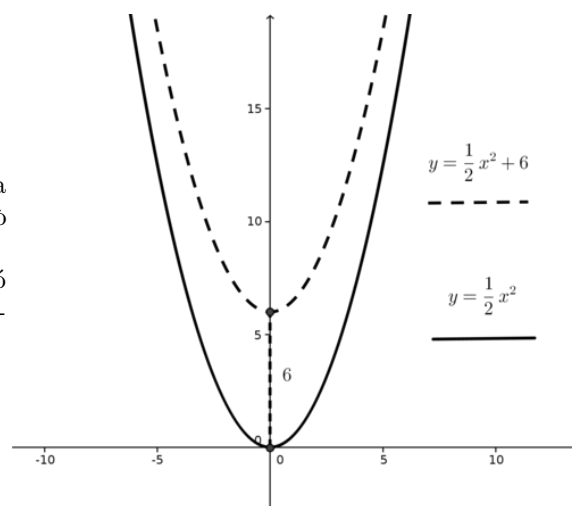
Com que en aquest cas $a < 0$, la paràbola està oberta cap avall. Per trobar les coordenades d'altres punts donen uns quants valors a la x tenint en compte la simetria:



- (2) Dibuixa la gràfica de la funció $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$

És una funció del segon tipus, per la qual cosa la seva gràfica serà igual que la de la funció $y = \frac{1}{2}x^2$ però desplaçada 6 unitats cap amunt.

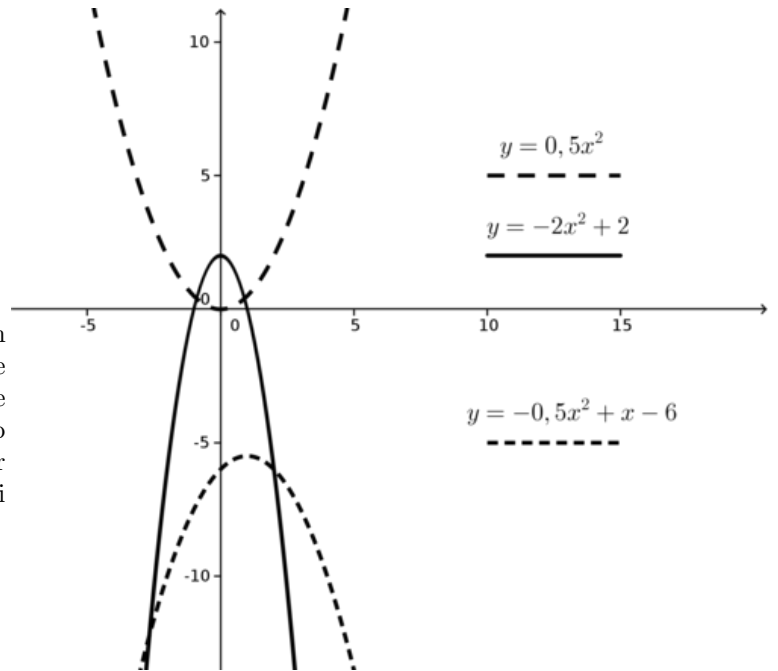
Per tant, només hem de dibuixar aquesta funció com hem explicat en l'exercici anterior i després desplaçar-la 6 unitats cap amunt.



- (3) Associa de forma raonada cada gràfica amb la seva equació

- (a) $y = -2x^2 + 2$
 (b) $y = 0,5x^2$
 (c) $y = -0,5x^2 + x - 6$

Recorda que el signe de a indica cap a on està oberta. El valor de c indica el punt de tall amb l'eix de les y 's. Si $b \neq 0$, l'eix de simetria de la paràbola no coincideix amb l'eix de les y 's. Com més gran és el valor absolut de a més tancada és la paràbola i viceversa.



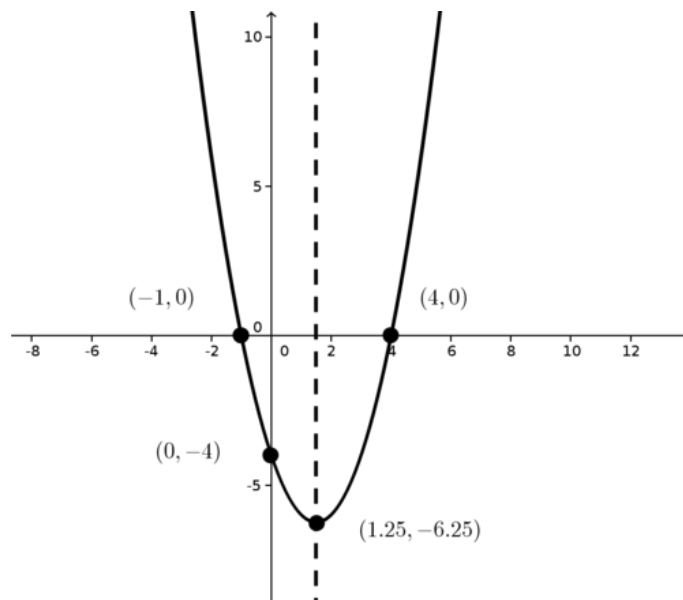
- (4) Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2 - 3x - 4$

En aquest cas el procés consisteix en seguir els següents passos:

- (a) Determinar si està oberta cap amunt o cap avall. Com que $a = 1 > 0$ va cap amunt.
 (b) Trobar el punt de tall amb l'eix de les y 's. Si $x = 0$ llavors $y = -4$.
 (c) Trobar els punts de tall amb l'eix x 's. Un punt està en l'eix de les x 's si la seva segona coordenada (la y) és igual a zero. Llavors hem de resoldre l'equació

$$x^2 - 3x - 4 \longrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

- (d) Trobar el vèrtex. Per això recordem que el vèrtex es troba en el punt d'abscissa $x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$ i la segona coordenada del vèrtex s'obté substituint aquest valor en la funció: $y = 6,25$.



6.5 Funcions de Proporcionalitat Inversa

Com el seu nom indica, la funció de proporcionalitat inversa relaciona dues magnituds inversament proporcionals, és a dir, tals que el seu producte és constant. Aquest producte rep el nom de constant de proporcionalitat. L'equació d'aquesta funció és:

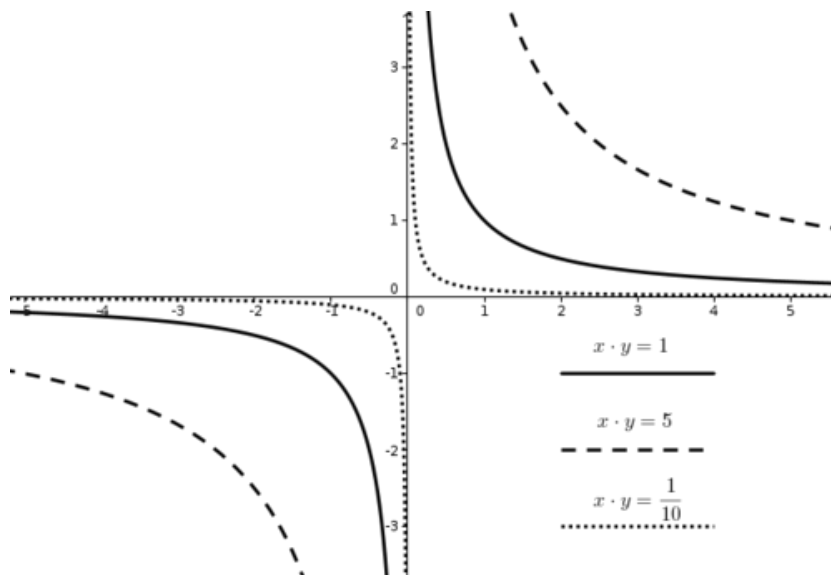
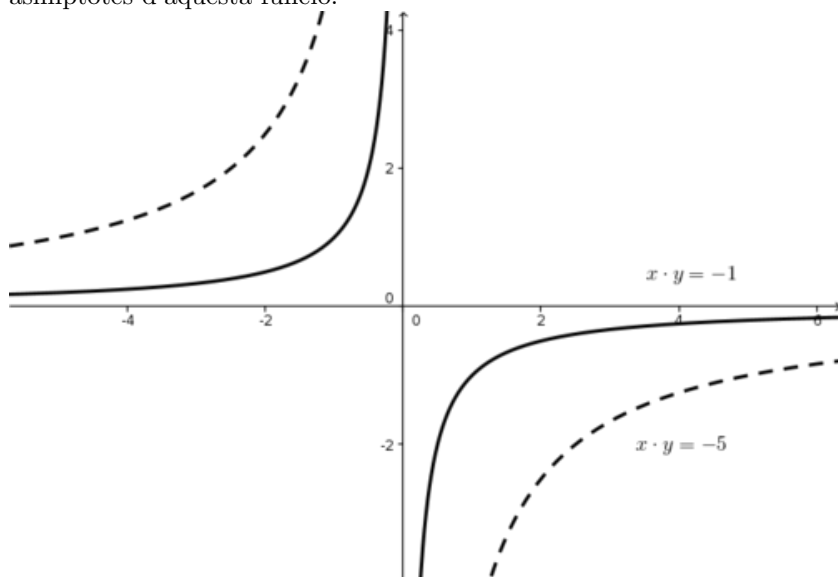
$$y = \frac{k}{x} \quad o \quad x \cdot y = k$$

on k és la constant de proporcionalitat.

La seva gràfica és una corba especial anomenada hipèrbola. Es tracta d'un tipus de corba que tendeix a assemblar-se a una línia recta quan ens allunyem de l'origen.

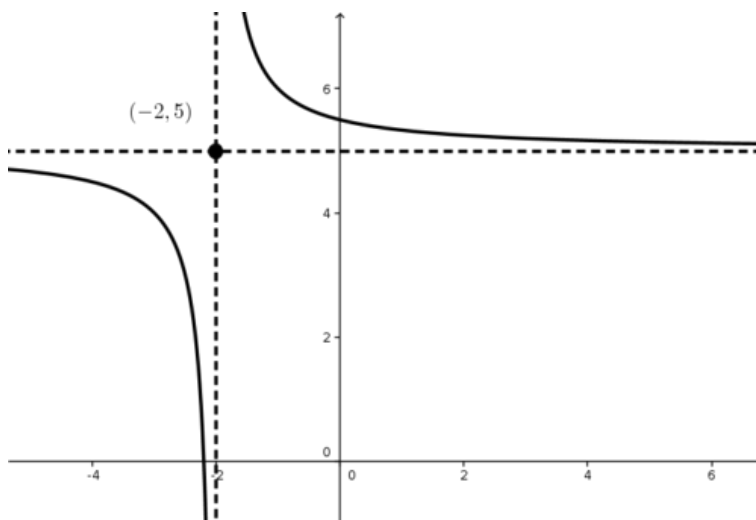
Característiques:

- Funció discontinua a l'origen.
- Com més gran és el valor absolut de k , és a dir $|k|$, més s'allunya dels eixos.
- Si $k > 0$ la gràfica està en els quadrants 1 i 3.
- Si $k < 0$ la gràfica està en els quadrants 2 i 4.
- És imparell (simètrica respecte de l'origen).
- Les dues branques de la gràfica es van aproximant als eixos. Es diu que els eixos són asímptotes d'aquesta funció.



- Si canviem x per $x - a$ i y per $y - b$, la gràfica es desplaça de manera que ara el vèrtex és (a, b) , les asímptotes són les rectes $x = a$ i $y = b$.

La següent gràfica correspon a la funció: $(x + 2) \cdot (y - 5) = 1$



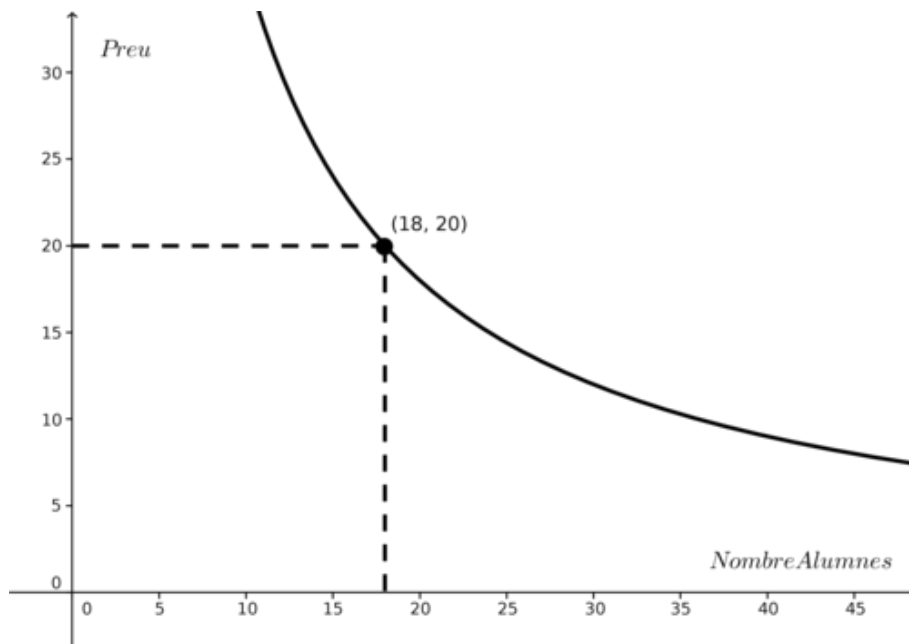
Exemple Resolt

Un grup d'alumnes vol organitzar una excursió i per això demanen pressupost a una agència de viatges que els demana 360€ pel lloguer d'una autocar siguin quin siguin el nombre d'alumnes que s'apunten. Els organitzadors estan una mica preocupats perquè només en són 10 i 36€ els sembla molts diners. A poc a poc van convencent a més companys i al final reuneixen un grup de 30 alumnes (el triple dels inicials), per la qual cosa el viatge els surt a 12€ per persona (la tercera part de la quantitat inicial). Tenim un exemple de proporcionalitat inversa: **el preu per alumne és inversament proporcional al nombre d'alumnes**.

Si anomenem x al nombre d'alumnes i a y al preu que ha de pagar cada un, està clar que es compleix:

$$x \cdot y = 360 \quad \text{o} \quad y = \frac{360}{x}$$

És una funció de proporcionalitat inversa la constant de proporcionalitat de la qual és 360. La gràfica següent mostra com varia el preu en funció del nombre d'alumnes.

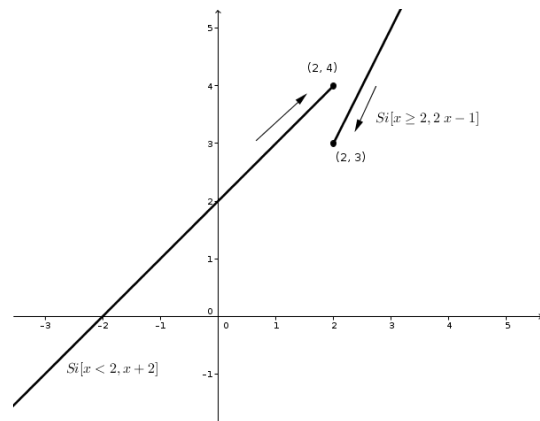


6.6 Funcions definides a trossos

Hi ha un tipus de funcions que vénen definides amb diferents expressions algebraiques segons els valors de x , es diu que estan definides a trossos.

Per descriure analíticament una funció formada per trossos d'altres funcions, es donen les expressions dels diferents trams, per ordre d'esquerra a dreta, indicant en cada tram els valors de x per als quals la funció està definida. A continuació pots veure un exemple d'aquest tipus de funció i la seva representació gràfica.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 0,5x - 3,5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



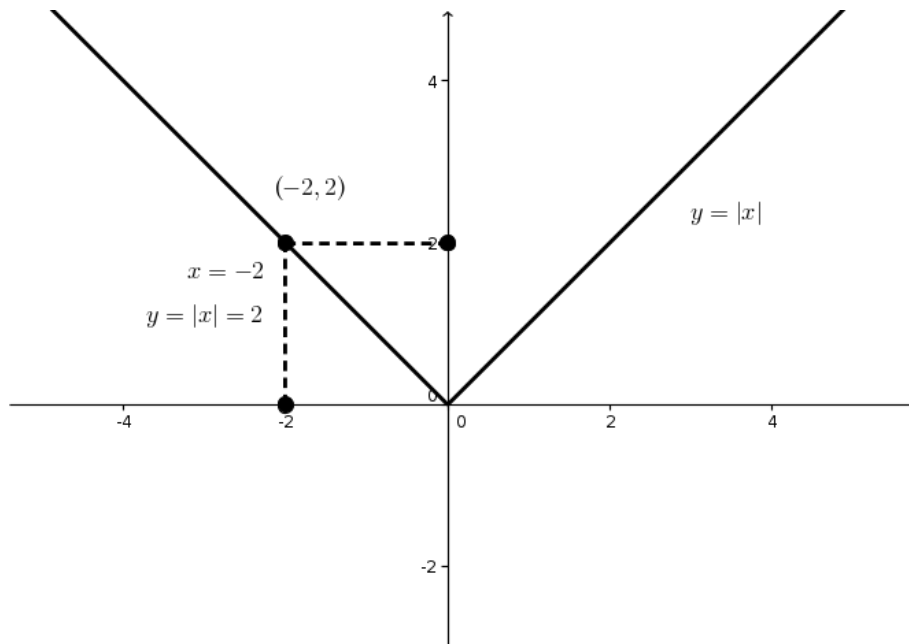
6.7 Funció Valor Absolut

El valor absolut d'un nombre es defineix com la distància entre aquest nombre i el zero. La funció valor absolut és la que assigna a cada nombre aquesta distància.

Tenint en compte que el valor absolut d'un nombre és el mateix nombre si aquest és positiu i el seu oposat si és negatiu, l'equació d'aquesta funció és:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Com veus és un exemple de funció definida a trossos. En cada tros ve representada per una funció lineal de pendents 1 i -1 respectivament, per tant, la seva gràfica està composta per dues semirectes amb aquests pendents que s'uneixen en l'origen.



6.8 Funció Part Entera

La funció part entera d'un nombre real es pot definir de la manera següent: és la funció que fa correspondre cada nombre real x al enter més gran que és més petit o igual que x . Dit d'una altra manera,

$$f(x) = n \text{ on } n \in \mathbb{Z} \text{ i } x \in [n, n+1).$$

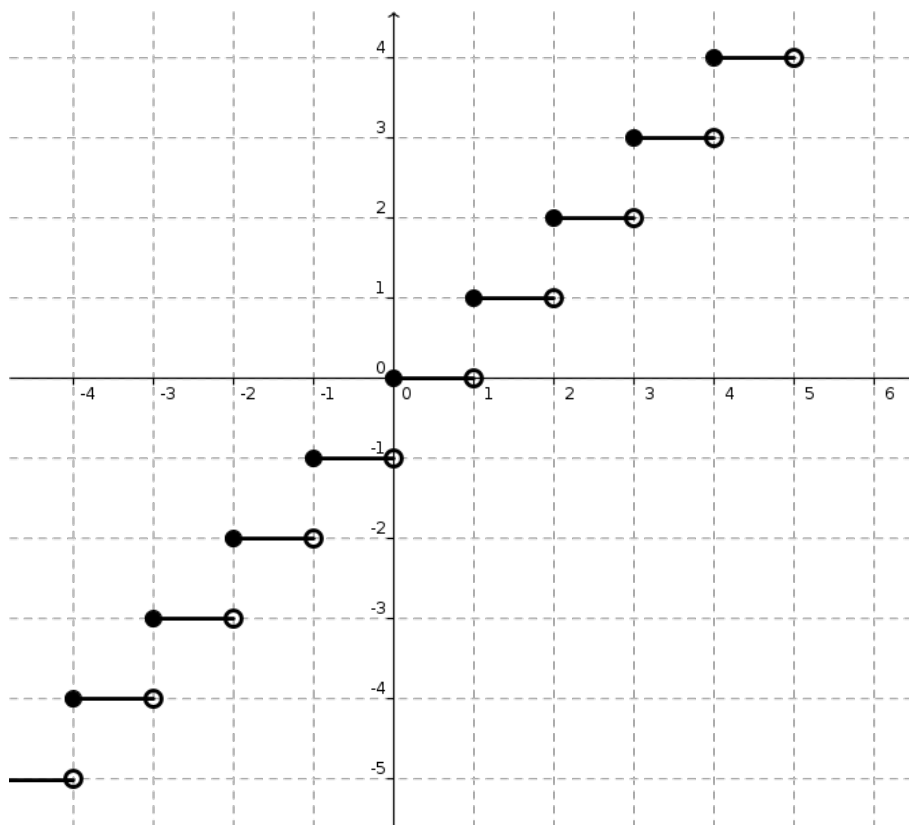
I si fem la seva expressió algebraica utilitzant les funcions definides a trossos, obtenim el següent:

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \\ -3 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \dots & \\ n & \text{si } n \leq x < n+1 \\ \dots & \end{cases}$$

Podem trobar la imatge de qualsevol nombre real de forma bastant senzilla:

$$f(-\sqrt{5}) = -3; \quad f\left(-\frac{9}{5}\right) = -2; \quad f(-0,5) = -1; \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 1; \quad f(3,65) = 3$$

Si fem la seva representació gràfica obtenim:



El domini de la funció és $D_f = \mathbb{R}$.

Recorda que el recorregut d'una funció és, per definició, el conjunt dels valors de la variable y que són imatge, com a mínim, d'una valor de x . A partir de la gràfica pots observar que el recorregut de la funció part entera és $R_f = \mathbb{Z}$.

Qualsevol nombre enter n és imatge de tots els nombres reals que pertanyen a l'interval $[n, n+1)$. És a dir, qualsevol nombre enter n té infinites antiimatges. Per tant, la funció part entera no té funció inversa,

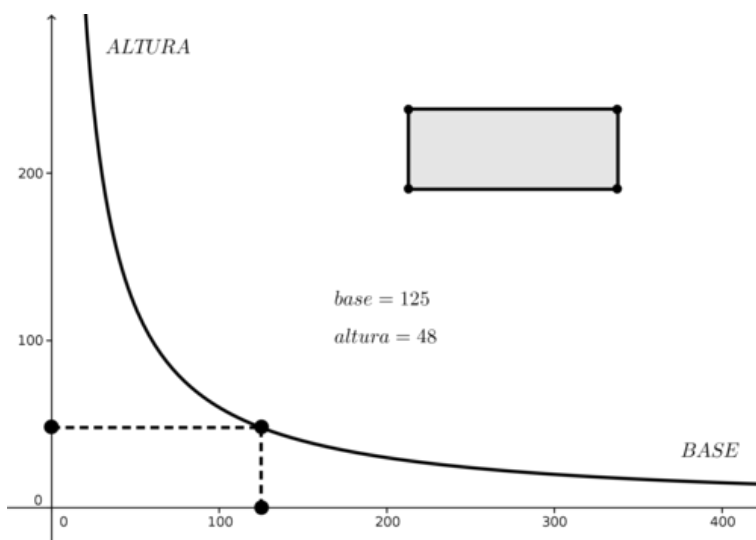
ja que en $f^{-1}(x)$ succeiria que a cada valor $x \in \mathbb{Z}$ li correspondria més d'una imatge, i perquè sigui funció cada valor del domini ha de tenir una i només una imatge.

Exercicis Resolts

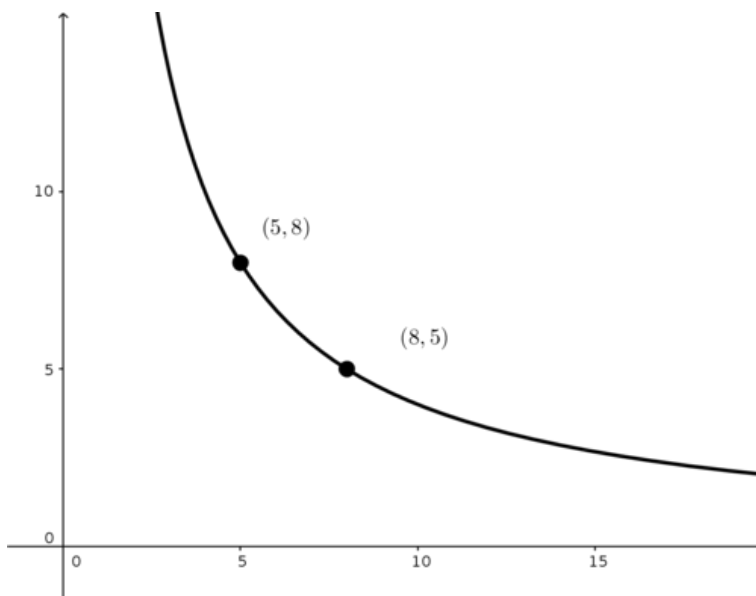
- (1) Indica si la base i l'altura de tots els rectangles la superfície dels quals mesura $6000m^2$ són magnituds inversament proporcionals. En cas afirmatiu, escriu l'equació de la funció que les relaciona i dibuixa la seva gràfica.

L'àrea d'un rectangle és igual a la base b per l'altura h . Si l'àrea és constant tenim $b \cdot h = k$. Llavors són inversament proporcionals. En el nostre cas l'equació és

$$b \cdot h = 6000 \iff h = \frac{6000}{b}$$



- (2) Determina l'equació de la següent gràfica:



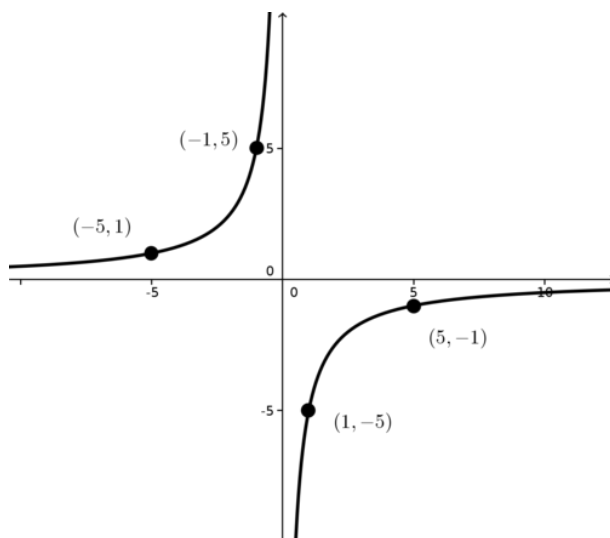
Es tracta d'una funció de proporcionalitat inversa

$$x \cdot y = k$$

intentem localitzar un o diversos punts amb coordenades enteres. Per exemple prenem el punt $(5, 8)$, llavors l'equació és: $x \cdot y = 5 \cdot 8 = 40$. Si és possible, podem buscar altres punts per poder-ho confirmar.

- (3) Dibuixa la gràfica de l'equació $x \cdot y = -5$.

Com que k és negativa, la gràfica ha d'estar en el segon i quart quadrants. Busquem un o diversos punts amb coordenades enteres tal que el seu producte sigui -5 i tenim en compte la simetria de la funció. Per exemple, passa pel punt $(-1, 5)$ o per $(1, -5)$. Si és possible, busquem més punts.



- (4) En les funcions definides a trossos següents, calcula les imatges dels valors de x indicats i representa-la gràficament.

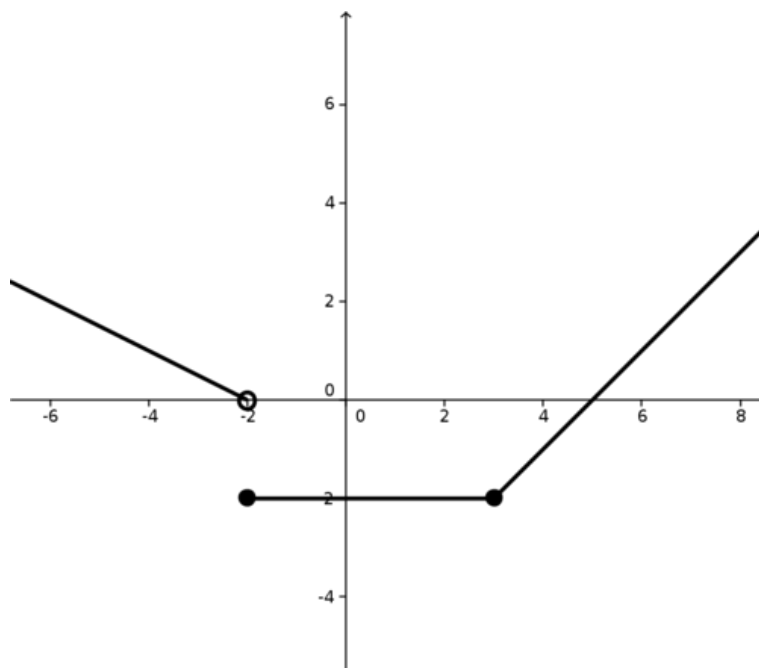
- (a) Els valors -4 , -2 , 1 , 3 i 6 , per la funció

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x - 1 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Per $x = -4$ es substitueix a dalt, $-4 < -2$. Per $x = -2$, $x = 1$ i $x = 3$ es substitueix al mig, ja que estan en $[-2, 3]$. I per $x = 6$ es substitueix a sota ja que $6 > 3$. Ens queda la taula de valors següent:

x	-4	-2	1	3	6
$f(x)$	1	-2	-2	-2	1

Si ara en fem la representació gràfica ens queda la funció següent:



(b) Els valors -6 , -2 , 0 , 2 i 4 , per la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + 2 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0,5x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

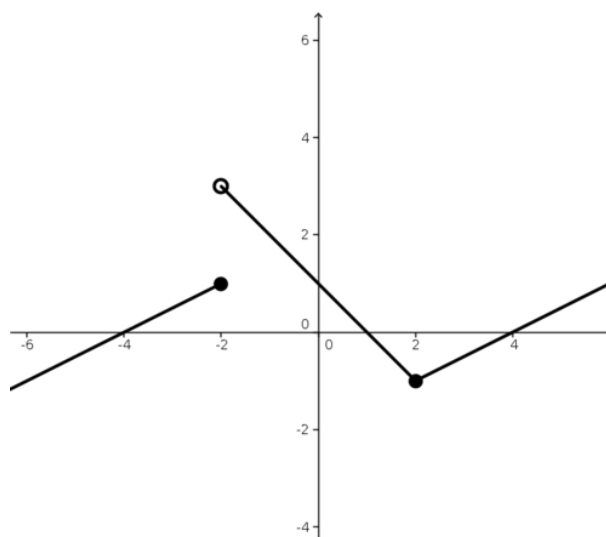
Per $x = -6$ i $x = -2$ substituïm a dalt.

Per $x = 0$ es substitueix al mig, ja que es compleix $-2 < 0 < 2$.

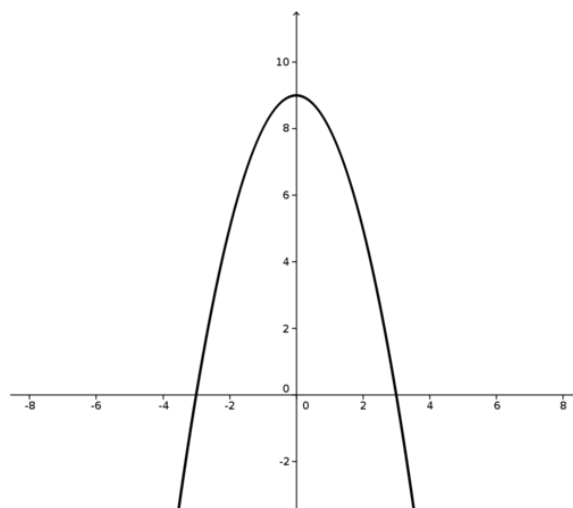
I per $x = 2$ i $x = 4$ substituïm a sota. I ens queda la taula de valors següent:

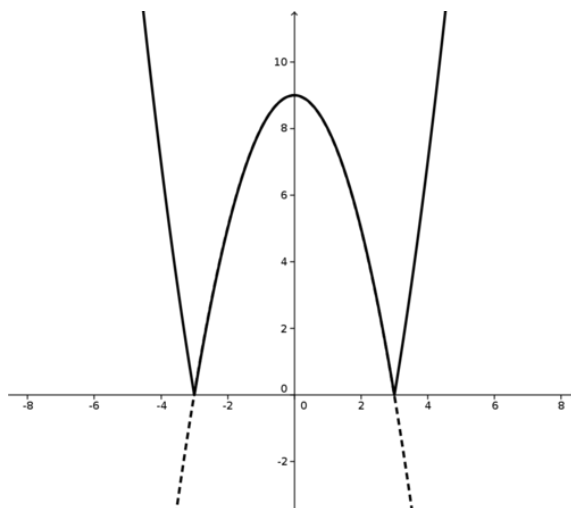
x	-6	-2	0	2	4
$f(x)$	-1	3	1	-1	0

Si ara en fem la representació gràfica ens queda la funció següent:



- (5) La següent gràfica es correspon a la gràfica de la funció $y = -x^2 + 9$. Dibuixa la gràfica que correspon al valor absolut d'aquesta funció.



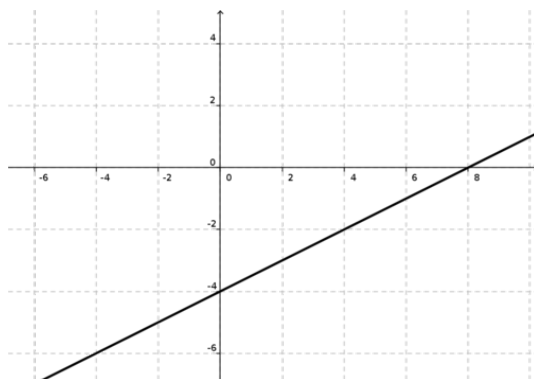


La línia contínua de la dreta es correspon a la gràfica buscada.

Recorda que el valor absolut d'un nombre coincideix amb el mateix nombre si és positiu i amb el seu oposat si és negatiu. Si et fixes a la gràfica de l'esquerra, els intervals on la funció és positiva, és a dir, per a $x \in (-3, 3)$ tenim exactament la mateixa gràfica a la dreta. En canvi, a la resta, és a dir per a $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, la funció de la dreta és la funció simètrica respecte l'eix de les x 's de la funció de l'esquerra.

6.9 Exercicis

- (1) Determina l'equació de la funció de la gràfica adjunta, indicant si es tracta d'una funció lineal o afí.



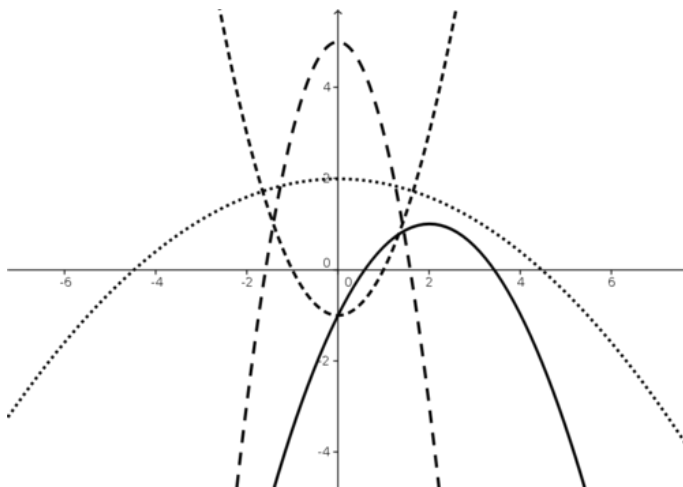
- (2) Dibuixa la gràfica de la funció $y = -2x + 5$.
- (3) Troba les coordenades del punt de tall de les rectes d'equacions: $f(x) : y = x + 9$ i $g(x) : y = 3x + 13$.
- (4) Troba l'equació de la funció la gràfica de la qual és paral·lela a la de la funció $y = 4x - 2$ passa pel punt $P(-1, 4)$.
- (5) Troba l'equació de la funció la gràfica de la qual passa pels punts $P(-2, 7)$ i $Q(-1, 4)$.
- (6) Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2 - 1$.
- (7) Associa cada gràfica amb la seva equació:

(a) $y = -0,5x^2 + 2x - 1$

(b) $y = -2x^2 + 5$

(c) $y = x^2 - 1$

(d) $y = -0,1x^2 + 3$



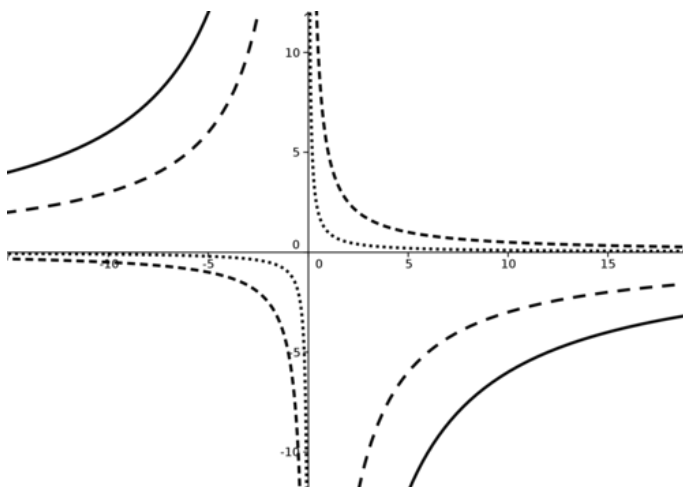
(8) Associa cada gràfica amb la seva equació:

(a) $x \cdot y = -60$

(b) $x \cdot y = -30$

(c) $x \cdot y = 5$

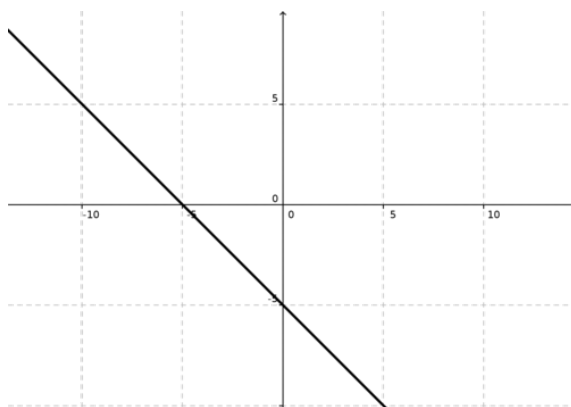
(d) $x \cdot y = 1$



(9) Els nombres de la taula adjunta corresponen a quantitats de dues magnituds inversament proporcionals. Emplena els forats que queden i escriu l'equació de la funció que relaciona aquestes dues magnituds.

x	2		5	-8		-20
y	40	-320	16		-8	

(10) La gràfica adjunta correspon a una funció $y = f(x)$. Dibuixa la gràfica de la funció $y = |f(x)|$.



(11) Dibuixa la gràfica de la funció

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- (12) Escriu l'expressió algebraica de la funció que relaciona l'import d'una trucada telefònica amb la seva durada. Suposem que la quota d'establiment de trucada sigui de 0,12€ i, a partir d'aquest moment, la tarifa sigui de 0,05€ per minut. Quin és l'import d'una trucada de 5 minuts? Quant va durar una trucada l'import del qual va ser de 5,07€.
- (13) El punt $P(a, 3)$ pertany a la recta que passa pels punts $Q(1, -4)$ i $R(5, 2)$. Calcula el valor d' a .
- (14) Amb 100m de tanca es vol delimitar un terreny rectangular, un dels costats del qual representem per x . Escriu l'expressió de l'àrea A del camp en funció d' x . Estableix, a partir de la gràfica, el domini i recorregut d'aquesta funció i indica per a quin valor d' x serà màxima l'àrea del camp.
- (15) Dibuixa una gràfica d'una funció contínua que verifiqui les condicions següents:
- Que talli els eixos de coordenades en els punts $(-4, 0)$, $(0, 0)$ i $(3, 0)$.
 - Que presenti un màxim relatiu en el punt $(-2, 3)$ i un mínim relatiu en el punt $(\frac{3}{2}, -2)$.

Determina els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció.

- (16) La tarifa d'una aparcament és d'1,50€ la primera hora o fracció i d'1,20 per a cadascuna de les hores (o fraccions d'hora) següents, fins a un màxim de 14,72€ per dia. Dibuixa la gràfica de la funció preu-temps.
- (17) El rendiment en percentatge d'un generador solar depèn de la temperatura segons una funció quadràtica. Determina l'expressió algebraica d'aquesta funció, sabent que el rendiment és màxim a $40^\circ C$ i nul a $10^\circ C$ i a $70^\circ C$. Quin és el rendiment màxim d'aquest generador?
- (18) Troba l'expressió algebraica d'una funció quadràtica sabent que la paràbola que la representa gràficament talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, 9)$ i té el vèrtex en el punt $(3, 0)$.
- (19) En una ciutat, les equacions de l'oferta f i de la demanda g d'un article el preu del qual és d' x € estan donades per:

$$f(x) = -450 + 9x \quad i \quad g(x) = 1350 - 6x$$

S'anomena *punt d'equilibri* el valor d' x per al qual es verifica la igualtat $f = g$, coneguda com a llei de l'oferta i la demanda. Determina gràficament i analíticament el punt d'equilibri al qual tendeix el mercat en el cas de l'article estudiat.

- (20) Representa gràficament la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Indica'n el domini i recorregut.
- (b) Estableix-ne els intervals de creixement i decreixement.
- (c) Es tracta d'una funció contínua?
- (d) Troba l'antiimatge o les antiimatges de 9.
- (21) Determina els punts d'intersecció de les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = 5x - 4$. Resol el problema analíticament i gràfica.
- (22) En un institut es van fer 1 500 fotocòpies en els cinc primers dies lectius d'un mes, i 5 400 en el decurs dels vint restants. Utilitza la interpolació lineal per estimar el nombre de fotocòpies fetes a l'institut quan havien transcorregut els dotze primers dies lectius d'aquell mes.
- (23) Dibuixa en l'interval $[0, 9]$ la gràfica d'una funció periòdica el període de la qual sigui 3.
- (24) En una gasolinera el preu d'un litre de gasolina és de 1,04€. Un dia decideixen apujar el preu un 1,66%. Uns dies després decideixen incrementar el preu un altre 3,18% sobre el preu anterior. Calcula el preu final i el percentatge d'augment sobre el preu inicial.

- (25) Es calcula que el nombre d'habitants d'una comunitat urbana variarà durant els pròxims vint anys d'acord amb aquesta funció:

$$h(x) = 200\,000 + \frac{50\,000}{x}$$

x expressa el temps en anys.

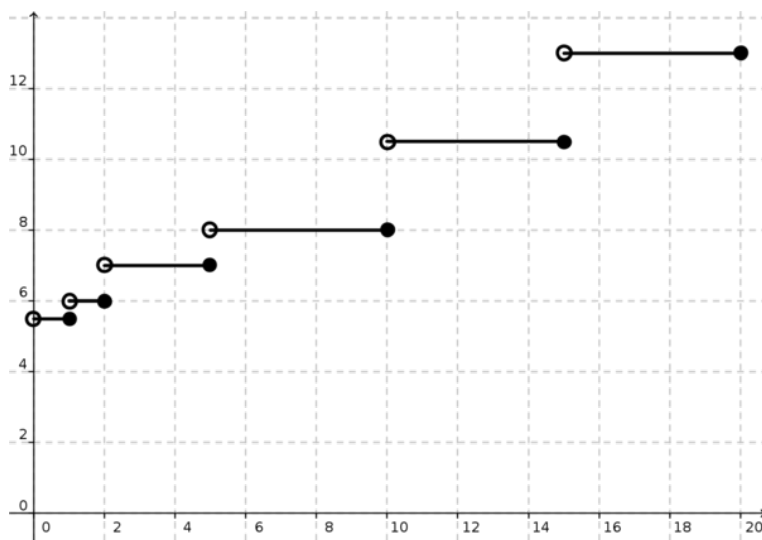
- (a) Pots determinar el nombre d'habitants que té aquesta comunitat actualment? Per què?
 (b) Quants habitants tindrà quan finalitzi el període de validesa de la relació expressada a la funció?
- (26) La cotització de les accions d'una empresa va seguir, aproximadament, aquesta evolució durant l'any 2014:

$$f(t) = 342 + 39t - 3t^2$$

t és el temps expressat en mesos ($0 \leq t \leq 12$).

- (a) Dibuixa la gràfica aproximada d'aquesta funció.
 (b) En quin mes es va assolir la màxima cotització?
 (c) Calcula el percentatge de benefici que hauria obtingut un accionista que hagués comprat accions d'aquesta empresa en el moment de mínima cotització i les hagués venut en el de màxima.
- (27) Un cotxe triga 4 hores a recórrer un determinat trajecte a una velocitat mitjana de 25km/h .
 (a) Quant trigaria a recórrer el mateix trajecte si la velocitat mitjana fos de 60km/h ?
 (b) Representant amb la x el temps en hores utilitzat a recórrer el trajecte, i amb la y la velocitat mitjana del cotxe en quilòmetres per hora, escriu l'equació de la funció $y = f(x)$.
- (28) El preu de cert article en un centre comercial és de 601€ . En les rebaixes de gener decideixen aplicar-li un descompte del 13%. En arribar febrer, encara queden existències i decideixen aplicar-li un nou descompte del 11% sobre el preu que tenia al gener. Calcula el preu final i el percentatge de descompte sobre el preu inicial.
- (29) Si una companyia de telèfons cobra $12,14\text{€}$ per parlar durant 2 minuts i $12,70\text{€}$ per parlar durant 10 minuts, calcula la quota fixa mensual que cobra, així com el cost per minut. Troba també el cost d'una trucada de 22 minuts.
- (30) Una avioneta té combustible suficient per 4 hores, viatjant a una velocitat constant de 270km/h . En enlairar-se, el pilot observa que hi ha vent a favor que permet volar a 318km/h amb la mateixa despesa, però ha de tenir en compte que a la tornada només podrà anar a 222km/h . Quina és la distància màxima que pot allunyar-se?
- (31) Calcula les dimensions del rectangle d'àrea màxima el perímetre del qual és igual a 436 metres.
- (32) Un mòbil recorre un trajecte de 265km a velocitat constant. Escriu l'equació de la funció que relaciona la velocitat del mòbil en funció del temps emprat. Després calcula el temps invertit en recórrer el trajecte si la velocitat és de 50km/h i la velocitat a la que es viatja, si el temps invertit és de 8 hores.
- (33) Una aixeta amb un cabal de 7 litres per minut triga 15 minuts en omplir un dipòsit. Troba l'equació de la funció que relaciona el temps que triga en omplir-se el dipòsit amb el cabal de l'aixeta. Dibuixa la seva gràfica i calcula el temps que trigaria en omplir-se si el cabal fos de 14 litres per minut.
- (34) L'IPC (Índex de Preus al Consum) és una mesura percentual de la variació mitjana dels preus d'un any a l'altre. Si l'IPC es manté constantment igual a 1,9% durant 5 anys, un producte que inicialment valia 655€ , quin preu tindrà al cap d'aquests anys?
- (35) Hem comprat un cotxe per $17\,782\text{€}$. Si el preu de venda en el mercat de segona mà es deprecia un 6% anual, calcula el valor del cotxe al cap de 4 anys?

- (36) Tenim un bloc de gel a -24°C de temperatura. El posem a escalfar en un recipient i triga 11 minuts en aconseguir els 0°C . Es manté 6 minuts a aquesta temperatura fins que es liqua totalment. Després triga 7 minuts a aconseguir l'ebullició a 100°C i altres 10 minuts en evaporar-se completament, temps durant el qual es manté la temperatura constant a 100°C . Troba l'equació que relaciona la temperatura de l'aigua en el recipient amb el temps transcorregut i dibuixa la seva gràfica. Després calcula quant es triga en aconseguir una temperatura de 25°C i quina temperatura s'aconsegueix al cap de 25 minuts.
- (37) La gràfica adjunta descriu el cost d'enviar un paquet per correu en funció del pes d'aquest paquet. Escriu la funció corresponent a aquesta gràfica i esbrina el preu d'enviar un paquet de 17kg .



Capítol 7

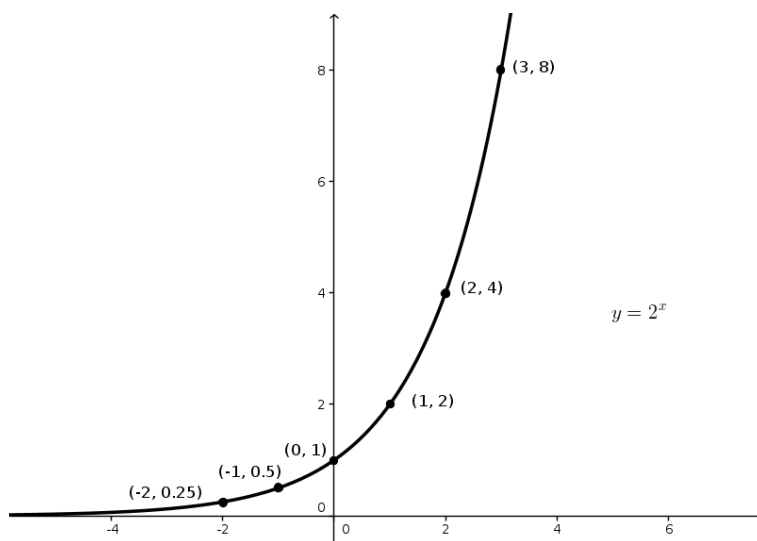
Funcions Exponencial i Logarítmica

7.1 Funcions Exponencials

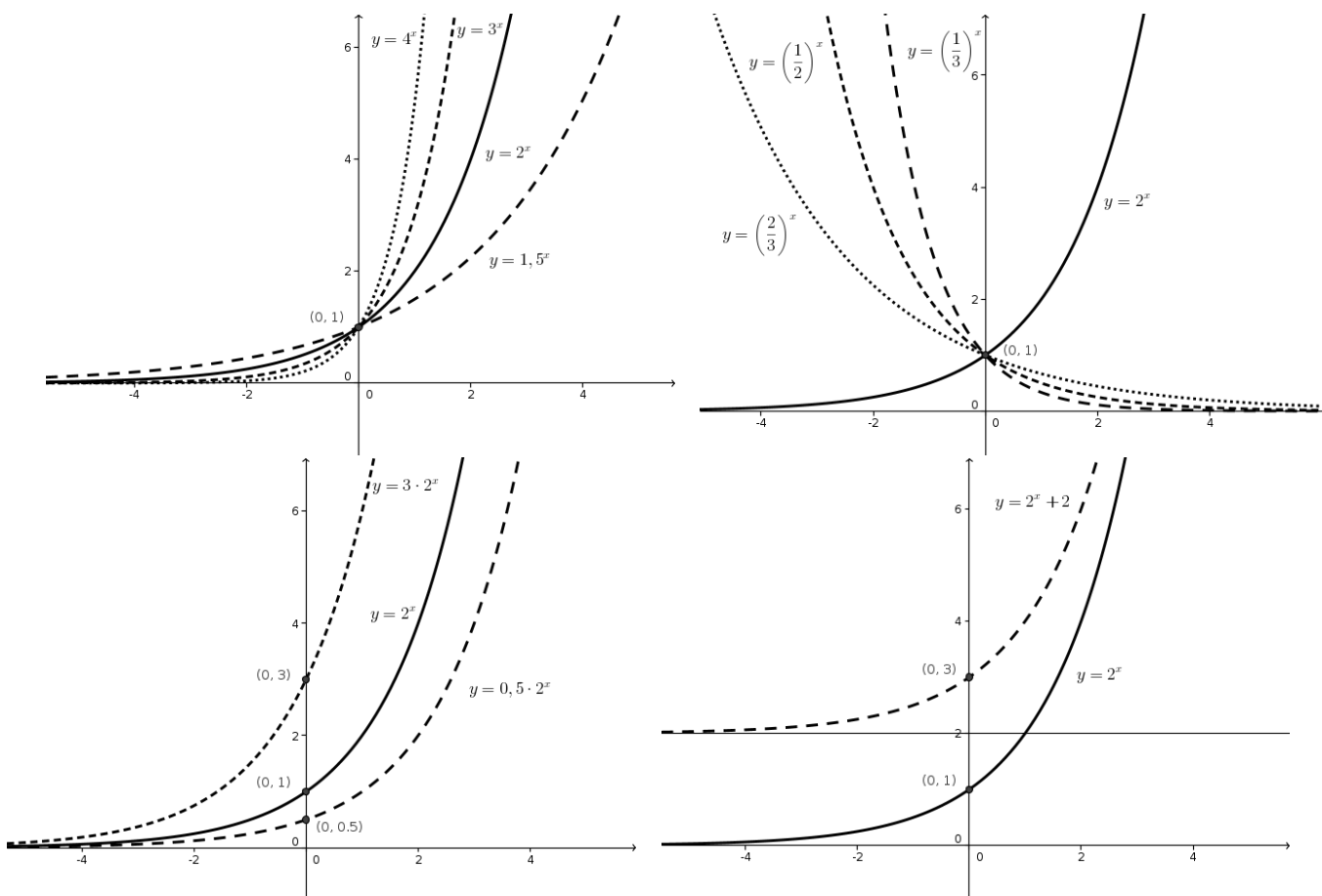
7.1.1 La funció exponencial

La funció exponencial és de la forma $y = a^x$, amb a com a nombre real positiu. A la figura es veu el traçat de la gràfica de $y = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	-0,5
y	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	-2



Als gràfics següents es pot veure com canvia la gràfica en variar a . Observeu que les gràfiques de $y = a^x$ i de $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ són simètriques respecte de l'eix OY.



7.1.2 Creixement exponencial

La funció exponencial es presenta en multitud de fenòmens de creixement animal, vegetal, econòmic, etc. En tots aquests contextos la variable és el temps. En el creixement exponencial, cada valor de y s'obté multiplicant el valor anterior per una quantitat constant a .

On k és el valor inicial (per a $t = 0$), t és el temps transcorregut i a és el factor pel qual es multiplica en cada unitat de temps.

Si $0 < a < 1$ es tracta d'un decreixement exponencial.

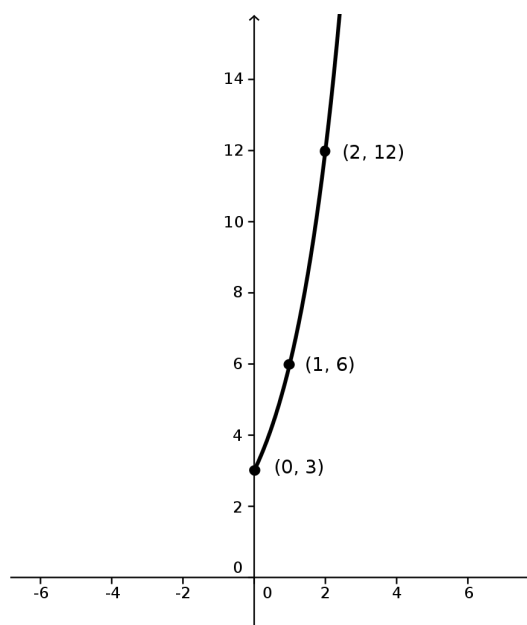
- El **domini** són els nombres reals i el **recorregut** són els reals positius.
- És una funció **contínua**.
- Si $a > 1$ la funció és creixent i si $0 < a < 1$ la funció és decreixent.
- Talla l'eix de les y 's en el punt $(0,1)$.
- L'eix OX és una asímptota.
- La funció és *injectiva*, és a dir, que si $a^n = a^m$, llavors $n = m$.

En les gràfiques anteriors es pot veure com en multiplicar per una constant $y = k \cdot a^x$, el punt de tall amb l'eix OY és $(0, k)$.

En sumar (o restar) una constant b la gràfica es desplaça cap amunt (o cap avall) b unitats i l'asímtota horitzontal passa a ser $y = b$.

En una laboratori tenen un cultiu bacterià, si el seu pes es multiplica per 2 cada dia, com es el seu creixement si el seu pes inicial és de 3 grams? $f(x) = 3 \cdot 2^x$
 Pes inicial de 3 grams.
 Creixement: per 2.

x	$f(x)$
0	$3 \cdot 0 = 3$
1	$3 \cdot 1 = 6$
2	$3 \cdot 4 = 12$
3	$3 \cdot 8 = 24$
4	$3 \cdot 16 = 32$



7.1.3 Aplicacions

La funció exponencial serveix per descriure qualsevol procés que evolucioni de manera que l'augment (o la disminució) en un petit interval de temps sigui proporcional al que hi havia al seu començament.

Veiem tres exemple:

- Creixement de poblacions.
- Interès dels diners acumulats.
- Desintegració radioactiva.

Interès compost En l'interès compost els interessos produïts per un capital, C_0 s'hi van acumulant, de tant en tant, per produir interessos nous.

Els intervals de temps, al cap dels quals els interessos s'acumulen al capital, es diuen períodes de capitalització o d'acumulació. Si són t anys, r és el rèdit anual (interès anual en %) el capital final obtingut ve donat per la fórmula:

$$C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Si es considera f la freqüència de capitalització ($f = 12$ si mesos, $f = 4$ si trimestres, $f = 365$ si dies...) la fórmula anterior queda

$$C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{f \cdot 100}\right)^{f \cdot t}$$

EXEMPLE Es col·loquen 5 000€ al 6% anual. En quant es convertiran al cap de 5 anys?
 Si els interessos s'acumulen anualment

$$C_t = 5\,000 \cdot 1,06^5 = 6\,691,13e$$

Si els interessos s'acumulen mensualment

$$C_t = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 5} = 5\,000 \cdot 1,005^{60} = 6\,744,25e$$

Si els interessos s'acumulen trimestralment

$$C_t = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{4 \cdot 5} = 5\,000 \cdot 1,015^{20} = 6\,734,27e$$

Creixement de poblacions El creixement vegetatiu d'una població el dona la diferència entre naixements i defuncions. Si inicialment partim d'una població P_0 que té un índex de creixement anual i (expressat en tant per un), la població després d'un any serà:

$$P = P_0 \cdot (1 + i)^t$$

EXEMPLE Un poble té 600 habitants. Se sap que la seva població creix a un ritme del 3% anual. Quants habitants tindrà d'aquí a 8 anys?

$$P = 600 \cdot 1,03^8 = 760$$

Desintegració radioactiva Les substàncies radioactives es desintegren amb el pas del temps. La quantitat d'una certa substància radioactiva que va quedant amb el pas del temps t , la dona:

$$M = M_0 \cdot a^t$$

on M_0 és la massa inicial, $0 < a < 1$ és una constant que depèn de la substància i de la unitat de temps que utilitzem.

La rapidesa de desintegració de les substàncies radioactives es mesura pel “període de desintegració”, que és el temps que tarda la massa a reduir-se a la meitat.

EXEMPLE Un gram d'estranci-90 es redueix a la meitat en 28 anys. Si l'any 2000 teníem 20 grams i prenem com a origen de temps l'any 2000.

La funció és:

$$M(x) = 20 \cdot 0,5^{\frac{x}{28}} = 20 \cdot 0,9755^x$$

L'any 2053 quedarà

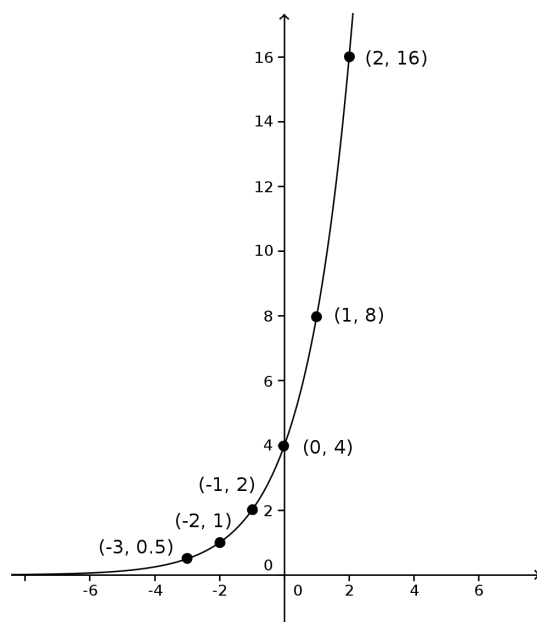
$$M = 20 \cdot 0,9755^{53} = 5,38gr$$

EXERCICIS RESOLTS

(1) Representa i estudia la funció $f(x) = 4 \cdot 2^x$.

$D_f = \mathbb{R}$,
 $R_f = (0, +\infty)$,
 Asíptota: $y = 0$,
 Tall OY: $(0, 4)$
 Creixent.

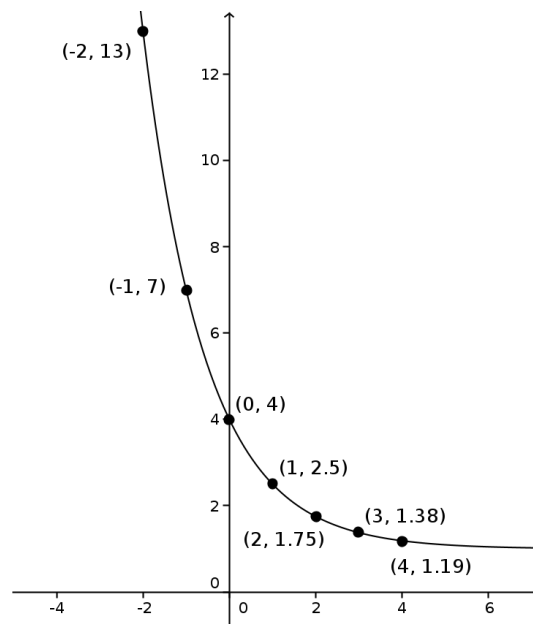
x	$f(x)$
0	4
1	8
2	16
-1	2
-2	1
-3	0,5



(2) Representa i estudia la funció $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} + 1$.

$D_f = \mathbb{R}$,
 $R_f = (1, +\infty)$,
 Asíntota: $y = 1$,
 Tall OY: $(0, 4)$
 Decreixent.

x	$f(x)$
0	4
1	2,5
2	1,75
-1	6
-2	13
-3	25



- (3) Construeix una taula de valors d'una funció exponencial i escriu l'expressió algebrica de la funció que $f(-2) = \frac{2}{9}$ i té una constant de creixement 3.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

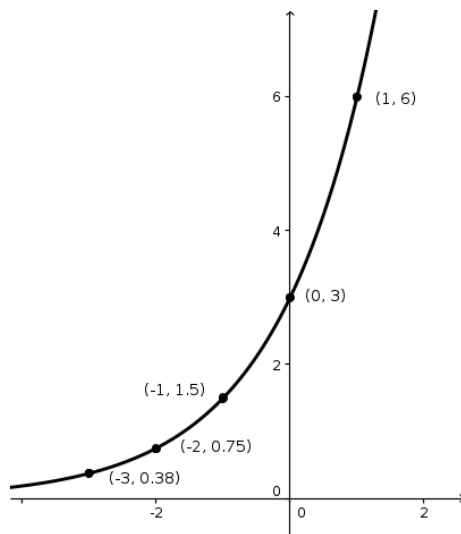
- (4) Construeix una taula de valors d'una funció exponencial i escriu l'expressió algebrica de la funció que $f(0) = 3$ i té una constant de creixement $\frac{1}{4}$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	48	12	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$

- (5) La taula correspon, en cada cas, a una funció exponencial. Escriu la fórmula.

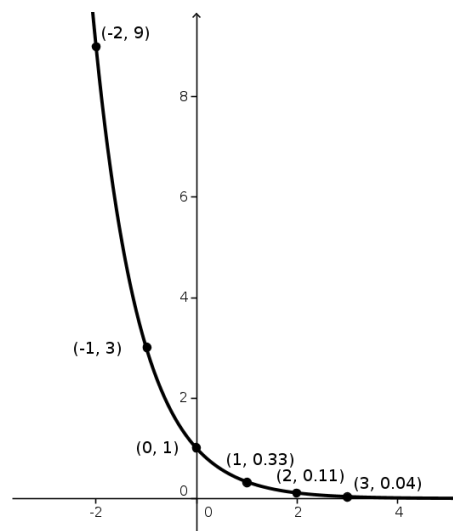
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

$$y = 3^x$$



x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



- (6) Indiqueu si la gràfica correspon a una funció amb creixement exponencial o amb decreixement. Escriu la fórmula.

Observeu la gràfica, i obtenim $f(0) = 3$, $f(1) = 6 = 3 \cdot 2$, $f(-1) = 1,5 = \frac{3}{2}$ La funció és: $f(x) = 3 \cdot 2^x$ i és creixent.

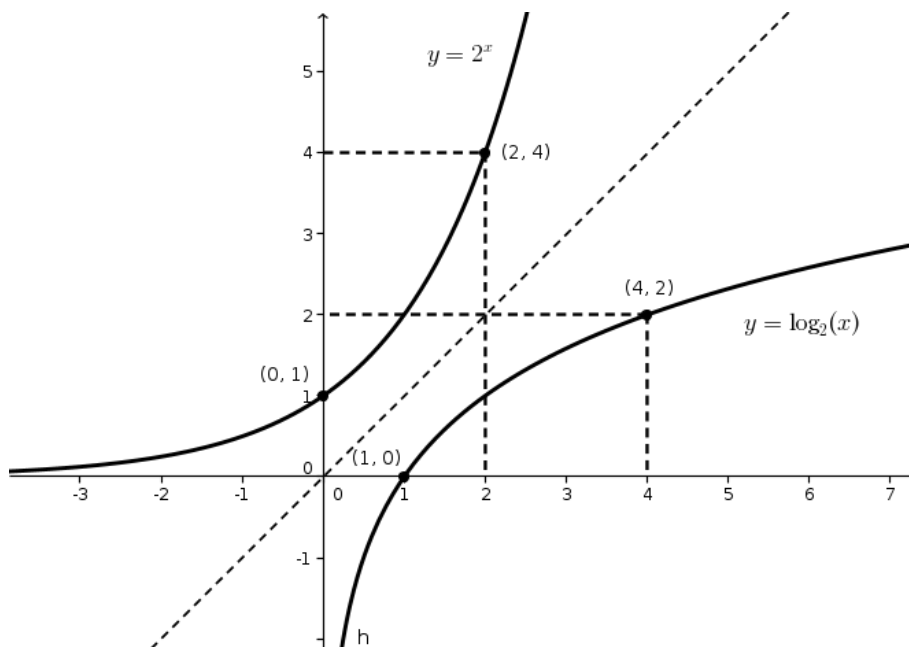
Observeu la gràfica, i obtenim $f(0) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(-2) = 9 = 3^2$ La funció és: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ i és decreixent.

7.2 Funció Logarítmica

7.2.1 Funció inversa de l'exponencial

Donada una funció injectiva, $y = f(x)$, s'anomena funció inversa de f una altra funció, g , la qual segueix $g(y) = x$. En l'escena adjunta construïm pas a pas la inversa de la funció exponencial.

Per a cada x s'obté ax . Al valor obtingut l'anomenem y o $f(x)$. La funció inversa de l'exponencial és la que compleix que $g(y) = x$. Aquesta funció s'anomena funció logarítmica i com podeu observar és simètrica a la funció exponencial respecte a la bisectriu del primer quadrant i el tercer.

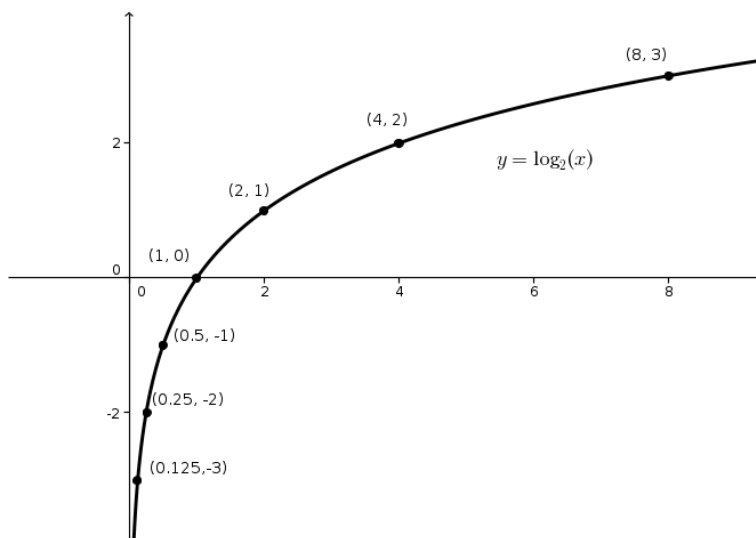


7.2.2 La funció logarítmica

És la funció inversa de la funció exponencial i es denota de la manera següent: $y = \log_a(x)$, amb $a > 0$ i diferent d'1.

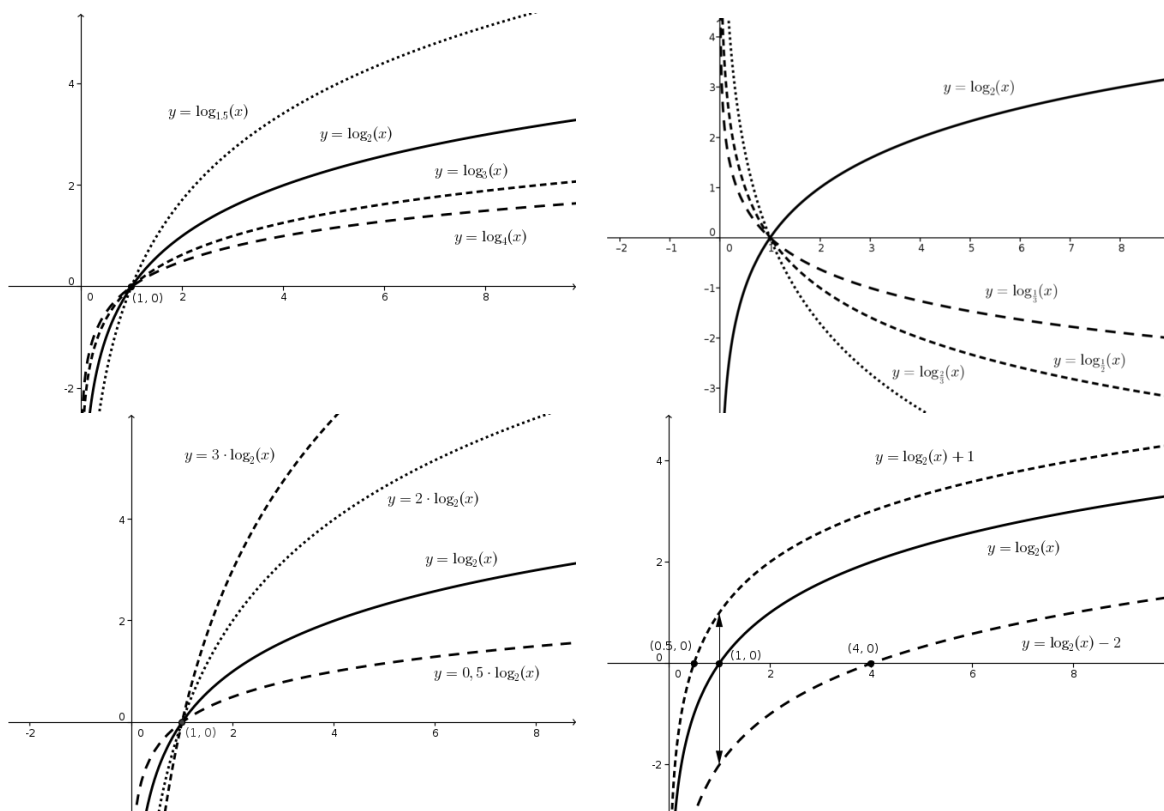
En l'escena construïm la gràfica de manera similar a com ho vam fer amb l'exponencial. Les seves propietats són "simètriques".

x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



A les gràfiques inferiors es pot veure com canvia la gràfica en variar a .

El domini són els reals positius, $D_f = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. El recorregut són tots els nombres reals, $R_f = \mathbb{R}$. És **contínua**. Si $a > 1$ i la funció és creixent i si $0 < a < 1$ és decreixent. Talla a l'eix OX en $(1, 0)$. L'eix OY és asimptota. La funció és injectiva: si $a^m = a^n$ llavors $m = n$.



En les gràfiques de la dreta es pot veure com en multiplicar per una constant $y = k \cdot \log_a(x)$ canvia la rapidesa amb què la funció creix o decreix ($k < 0$).

En sumar (o restar) una constant b la gràfica desplaça cap amunt (o cap avall) b unitats, canviant el punt de tall amb l'eix d'abscisses.

7.2.3 Logaritmes

Donats dos nombres reals positius, a i b ($a \neq 1$), anomenem logaritme en base a de b al nombre que cal elevar a per obtenir b . La definició anterior indica que:

$$\log_a(b) = c \iff a^c = b$$

Propietats dels logaritmes

- Logaritme d'un producte: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- Logaritme d'un quocient: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- Logaritme d'una potència: $\log_a(b^m) = m \cdot \log_a(b)$
- En qualsevol base: $\log_a 1 = 0$ ja que $a^0 = 1$ i $\log_a(a) = 1$ ja que $a^1 = a$.

7.2.4 Logaritmes decimals

Són els logaritmes de base 10. Són els més utilitzats i per aquest motiu, no s'acostumen a escriure la base quan s'utilitzen:

$$\begin{aligned}\log(10) &= \log(10^1) = 1 \\ \log(100) &= \log(10^2) = 2 \\ \log(1000) &= \log(10^3) = 3 \\ \log(10000) &= \log(10^4) = 4, \dots\end{aligned}$$

Observeu que llavors el logaritme d'un número de 2 xifres, comprès entre 10 i 100, és 1 ...; el log dels nombres de 3 xifres serà 2 ...; etc.

D'altra banda:

$$\begin{aligned}\log(0,1) &= \log(10^{-1}) = -1 \\ \log(0,01) &= \log(10^{-2}) = -2 \\ \log(0,001) &= \log(10^{-3}) = -3, \dots\end{aligned}$$

Llavors el logaritme d'un número comprès entre 0,01 i 0,1 serà $-1, \dots$ el d'un comprès entre 0,001 i 0,01 serà $-2, \dots$, etc.

Canvia de base

Les calculadores normalment permeten calcular dos tipus de logaritmes: decimals (base=10) i neperi-ans o naturals (base=e), que s'estudien en cursos posteriors. Quan volem calcular logaritmes en qualsevol altra base hem de recórrer a la fórmula del canvi de base:

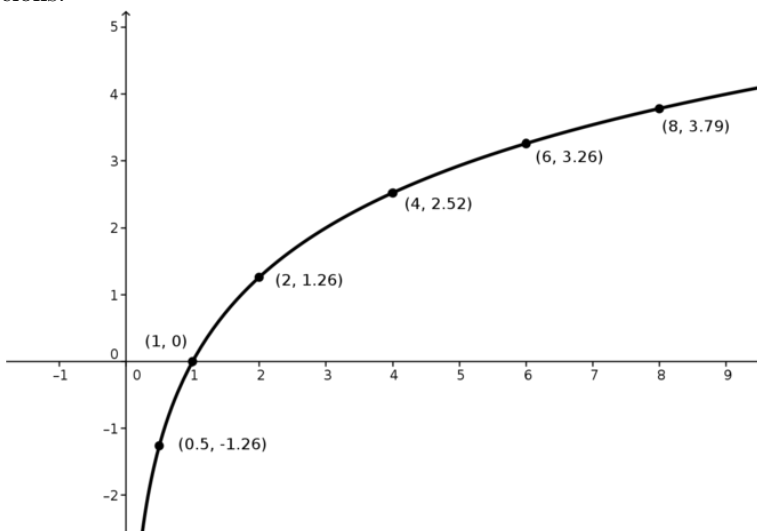
$$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)}$$

$$\begin{aligned}\log_2(128) &= 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128 & \log_3\left(\frac{1}{243}\right) &= -4 \Leftrightarrow 3^{-4} = \frac{1}{243} \\ \log_{\frac{1}{2}}(8) &= -3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 & \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right) &= 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

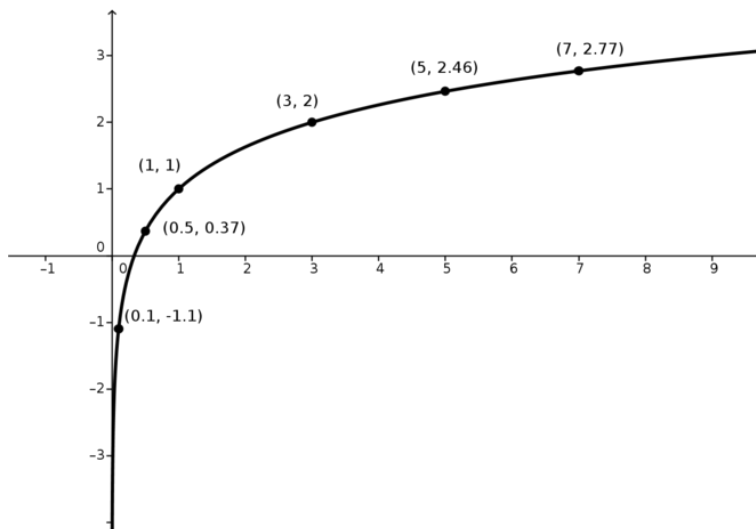
EXERCICIS RESOLTS

(1) Representeu i estudeu les funcions:

$f(x) = 2 \cdot \log_3(x)$
 $D_f = (0, +\infty)$
 $R_f = \mathbb{R}$
 Asíptota: $x = 0$
 Tall OX: $(1,0)$
 Funció Creixent.



$f(x) = \log_3(x) + 1$
 $D_f = (0, +\infty)$
 $R_f = \mathbb{R}$
 Asíntota: $x = 0$
 Tall OX: $(\frac{1}{3}, 0)$
 Funció Creixent.



(2) Calculeu x en cada cas aplicant la definició de logaritme:

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------------|--|
| (a) $\log_6(\frac{1}{6}) = x$ | (d) $\log_{\frac{1}{3}}(1) = x$ | (g) $\log_3(\frac{1}{9}) = x$ |
| (b) $\log_4(2) = x$ | (e) $\log_3(81) = x$ | (h) $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16}) = x$ |
| (c) $\log_5(125) = x$ | (f) $\log_{\frac{1}{5}}(25) = x$ | (i) $\log_{\frac{1}{8}}(4096) = x$ |

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $x = -1 \rightarrow 6^{-1} = \frac{1}{6}$ | (d) $x = 0 \rightarrow (\frac{1}{8})^0 = 1$ | (h) $x = 4 \rightarrow (\frac{1}{4})^4$ |
| (b) $x = \frac{1}{2} \rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = 2$ | (e) $x = 4 \rightarrow 3^4 = 81$ | |
| (c) $x = 3 \rightarrow 5^3 = 125$ | (f) $x = -2 \rightarrow (\frac{1}{5})^{-2} = 25$ | (i) $x = -4 \rightarrow (\frac{1}{8})^{-4} = 4096$ |
| | (g) $x = -2 \rightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$ | |

(3) Sabent que el $\log 2 = 0,301030$ calculeu sense ajuda de la calculadora, el $\log 40$, $\log(1,6)$ i $\log(\frac{125}{1000})$

- (a) $\log 40 = \log(4 \cdot 10) = \log(2^2 \cdot 10) = \log 2^2 + \log 10 = 2 \cdot 0,301030 + 1 = 1,602060$
- (b) $\log(1,6) = \log(\frac{16}{10}) = \log(\frac{2^4}{10}) = \log 2^4 \cdot \log 10 = 4 \log 2 \cdot \log 10 = 4 \cdot 0,301030 - 1 = 0,204120$
- (c) $\log(\frac{125}{1000}) = \log(\frac{5^3}{10^3}) = 3(\log 5 - \log 10) = 3 \log(\frac{10}{2}) - 3 = 3(\log 10 - \log 2) - 3 = 3 - 3 \log 2 - 3 = -3 \cdot 0,301030 = -0,903090$

(4) Amb la calculadora trobeu els logaritmes següents:

- | | |
|---|--|
| (a) $\log_2(23,721) = \frac{\log(23,721)}{\log 2} = 4,5681$ | (c) $\log_5(0,37906) = \frac{\log(0,37906)}{\log 5} = -0,6027$ |
| (b) $\log_3(2,34561) = \frac{\log(2,34561)}{\log 3} = 0,7760$ | (d) $\log_7(0,37906) = \frac{\log(0,37906)}{\log 7} = -0,4985$ |

7.3 Exercicis

- (1) Envasem 276 litres d'aigua mineral en ampolles iguals. Escriviu la funció que relaciona el nombre d'ampolles que s'empren i la seva capacitat.
- (2) Un mòbil recorre un trajecte de 130km a una velocitat constant. Escriviu la funció velocitat-temps. Calculeu el temps invertit a una velocitat de 50km/h i a quina velocitat va si li costa 5 hores fer el recorregut.
- (3) Un aixeta amb un cabal de 8 litres per minut tarda 42min a omplir un dipòsit. Quant tardaria si el cabal fos de $24\frac{\text{l}}{\text{min}}$? Escriviu la funció cabal-temps.
- (4) Calculeu les asímptotes de les funcions següents:

$$(a) f(x) = \frac{2x+4}{x+3}$$

$$(c) f(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

$$(b) f(x) = \frac{2x-1}{x}$$

$$(d) f(x) = \frac{-x}{x+2}$$

- (5) Escriviu l'equació de la funció la gràfica de qual és una hipèrbola com la de la figura, amb el centre de simetria en el punt $(2, -1)$.
- (6) Els costos d'edició de x exemplars d'un llibre els dona $y = 21x + 24$ ($x > 0$). Quant costa editar 8 exemplars?, i 80?. Escriviu la funció que indica el cost per exemplar, per molts exemplars que es publiquin, quin és el cost unitari com mínim?
- (7) En què es converteix després de 15 anys, un capital de 23 000€ col·locat a l'interès compost del 5,5% anual?
- (8) Un capital col·locat a interès compost al 2% anual, s'ha convertit en 3 anys en 9 550,87? Quina era el capital inicial?
- (9) Un capital de 29 000€ col·locat a interès compost s'ha convertit al cap de 4 anys en 31 390,53€? Quin és el rèdit (interès anual) a què ha estat col·locat?
- (10) Un capital de 7 000€, col·locat a interès compost del 2% anual, s'ha convertit al cap d'uns anys en 8 201,61€? Quants anys han transcorregut?
- (11) Quants anys ha d'estar col·locat cert capital, al 3% anual, perquè es dupliqui.
- (12) El període de desintegració del carboni 14 són 5 370 anys. En quina quantitat es converteixen 10g al cap de 1 000 anys?
- (13) Quants anys han de passar perquè una mostra de 30g de C_{14} es converteixi en 20,86g? (Període de desintegració del C_{14} és de 5 370 anys).
- (14) Una mostra de 60g d'una substància radioactiva es converteix en 35,67g en 30 anys. Quin és el període de desintegració?
- (15) La mida de cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 30 minuts. Si suposem que el cultiu té inicialment 5 milions de bacteris, Quantes hores necessitarà per tenir 320 milions de bacteris?
- (16) La mida de cert cultiu de bacteris es multiplica per 2 cada 20 minuts, si al cap de 3 hores el cultiu té 576 milions de bacteris, quantes n'hi havia en l'instant inicial?
- (17) Calculeu el número:
- (a) El logaritme del qual en base 6 és 3.
 - (b) El logaritme del qual en base 4 és -3.
 - (c) El logaritme del qual en base 10 és 2.
 - (d) El logaritme del qual en base $\frac{1}{2}$ és -3.
 - (e) El logaritme del qual en base $\frac{1}{5}$ és 2.
- (18) En quina base?
- (a) El logaritme de 0,001 és -3.
 - (b) El logaritme de 243 és 3.
 - (c) El logaritme de 8 és 1.
 - (d) El logaritme de $\frac{1}{81}$ és -4.
 - (e) El logaritme de 49 és 2.
- (19) Calculeu mentalment:
- (a) El logaritme en base 2 de 32.
 - (b) El logaritme en base 5 de 125.

- (c) El logaritme en base 3 de $\frac{1}{9}$.
- (d) El logaritme en base 7 de 1.
- (e) El logaritme en base 6 de 216.

(20) Si sabem que $\log 2 = 0,3010$ i que $\log 3 = 0,4771$, calculeu:

- (a) $\log(16)$
- (b) $\log(512)$
- (c) $\log\left(\frac{16}{81}\right)$
- (d) $\log(24)$
- (e) $\log(72)$

(21) Utilitzeu la calculadora per esbrinar el valor de:

- (a) $\log_7(12456,789)$
- (b) $\log_5(5123,4345)$
- (c) $\log_9(47658,897)$
- (d) $\log_3(23,146)$
- (e) $\log_6(1235,098)$

(22) Resoleu les equacions exponencials següents:

- (a) $32^{-9x+9} = 16$
- (b) $27^{2x+3} = 9^3$
- (c) $4^{-3x+8} = 8$
- (d) $9^{8x-7} = 1$
- (e) $25^{-5x-5} = 1$
- (f) $3^x = \sqrt[3]{9}$
- (g) $9 \cdot 3^{x-1} = 243$
- (h) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$
- (i) $5^{2x} - 5^x - 12 = 0$
- (j) $2^x + 2^{1-x} = 3$
- (k) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$
- (l) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
- (m) $9^x - 3^x - 6 = 0$
- (n) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

(23) Calculeu el valor de x de:

- (a) $7^x = 5$
- (b) $5^x = 7$
- (c) $2,13^x = 4,5$

(24) Aplicant les propietats dels logaritmes resoleu les equacions següents:

- (a) $\log(32 + x^2) - 2 \cdot \log(4 - x) = 0$
- (b) $2 \cdot \log x - \log(x - 16) = 2$
- (c) $\log x^2 - \log \frac{10x+11}{10} = -2$
- (d) $5 \cdot \log \frac{x}{2} + 2 \log \frac{x}{3} = 3 \cdot \log x - \log \frac{32}{9}$
- (e) $\log(5x - 3) = \frac{4}{5}$
- (f) $\log_2(x) + \log_2(x - 2) = 3$
- (g) $2 \log_4(x) + \log_4(2x) = 2$
- (h) $4 \ln(2x) - \ln(9x^2) = 0$
- (i) $\log(x + 3) - \log(x - 6) = 1$
- (j) $\log(\sqrt{3x + 5}) + \log(\sqrt{x}) = 1$

(25) Resoleu els sistemes:

- (a)
$$\begin{cases} 2 \cdot \log x - 3 \cdot \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Capítol 8

Matemàtica Financera

8.1 Introducció

Un entitat financera concedeix un préstec de 4000€ a un client. El préstec té una durada de 2 anys, i es pacta que es retornarà en mensualitats de 180€. Per tant, la persona que rep el préstec haurà de pagar:

$$180\text{€} \cdot 24 \text{ mesos} = 4320\text{€}$$

Per tant, estarà pagant 320€ més dels que ha rebut. De fet, l'entitat financera no disposa dels 4000€ realment, els crea del no res, i quan la persona que retorna el préstec, el retorna sencer, l'entitat financera destrueix els 4000€ i es queda amb els 320€ que pot apuntar a la llista de beneficis sense haver produït res de nou.

Aquesta quantitat de 320€ es coneix com a **interès**. I la **taxa d'interès** és la quantitat de diners addicional que es paga per cada 100€ rebuts. Normalment, aquesta taxa es compta de forma anual. Per tant, en el nostre cas, si tenim els 4000€ i el primer any s'han d'haver pagat 160€ més, això vol dir, que tenim una taxa d'interès anual del 4%. Ja que de cada 100€ prestats, n'hem pagat 104€.

(1) Calcula

(a) El 20% de 400€

(c) El 3,25% de 200€

(b) El 35% de 205€

(d) El 2,3% de 2405€

(2) Digues quins interessos ha de pagar una persona que demana un préstec de 3000€ al 3% anual.

8.2 Interès Simple

Ingressem uns diners en un dipòsit d'una entitat financera, 3000€. L'entitat ens assegura un interès simple amb una taxa d'interès anual del 3,5%. Volem saber els interessos que ens generaran aquests diners al llarg dels anys.

Al final del primer any, els interessos seran de

$$3000\text{€} \cdot \frac{3,5}{100} = 105\text{€}$$

El fet que l'interès sigui simple ens està dient que aquests interessos no s'acumulen al capital pel qual estem computant els interessos de l'any següent. Per tant, el segon any obtindrem els mateixos interessos que el primer any. Això vol dir que cada any obtindrem la mateixa quantitat d'interessos: 105€.

Si fem una taula dels interessos que anirem generant cada any i les quantitats que anirem acumulant:

Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
1	3000€	105€	3105€
2	3000€	105€	3210€
3	3000€	105€	3315€
4	3000€	105€	3420€
5	3000€	105€	3525€
...	...	...	...
n	3000€	105€	$3000 + n \cdot 105€$

Aquests càlculs els expressarem amb la següent fórmula pel cas general:

$$I = C_0 \frac{r}{100} t$$

On C_0 és la quantitat inicial que anomenem **capital inicial**.

r és la **taxa d'interès** anual en tant per cent.

t és el **temps** expressat en anys.

I són els **interessos** produïts pel capital inicial durant t anys.

Si considerem $\frac{r}{100} = i$, tindrem la taxa d'interès anual en tant per u, amb la qual cosa l'expressió anterior es transforma en una altra de més senzilla:

$$I = C_0 i t$$

Finalment, definim C_t com el **capital final** que es calcula sumant el capital inicial i els interessos acumulats durant els t anys.

$$C_t = C_0 + I = C_0 + C_0 i t = C_0 (1 + i t)$$

A la fórmula anterior cal tenir en compte que hem de treballar en taxes d'interès que es corresponguin amb el temps. És a dir, que si la taxa d'interès és anual, el temps ha d'expressar-se en anys, i si és per mesos, en mesos.

Tindrem en compte que: 1 any = 12 mesos = 2 semestres = 3 quadrimestres = 4 trimestres.

Es considera que un **any comercial** equival a 12 mesos de 30 dies cadascun, per tant, considerem que una any té 360 dies.

- (3) Calcula quin capital obtindrem al cap de tres anys si dipositem 9000€ en un banc que ens ofereix un tipus d'interès anual del 6%.
- (4) La Joana té un capital de 2000€ i ha decidit depositar-los en un banc a règim d'interès simple durant 5 anys i a un tipus d'interès anual del 7%. Calcula el capital final al cap de cinc anys.
- (5) Quin interès ens produiran 125000 euros durant 4 anys al 3% d'interès simple anual?
- (6) Completa la següent taula d'evolució d'un capital de 600€ al 8% d'interès simple anual al llarg de 7 anys:

Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

- (7) Calculeu el temps en que es varen invertir 12 500€ a una taxa d'interès simple anual del 4,5% si el capital final generat va ser de 14 187€.
- (8) Varem prestar 270 455€ el 8 de març a règim d'interès simple al 12% anual. Determina la quantitat de capital que ens pertocarà el 25 de Juny.
- (9) Un capital de 300 506€ prestat a règim d'interès simple en 8 mesos produeix uns interessos de 30 051€. Calculeu la taxa anual.
- (10) Un capital a l'11% d'interès simple en 310 dies han produït uns interessos de 6 148€. Trobeu el capital inicial i el capital resultant.
- (11) Calculeu la taxa d'interès anual per a que un capital a règim d'interès simple es dupliqui en 30 anys.
- (12) Calculeu el temps necessari per a que un capital col·locat a l'11% a règim d'interès simple es tripliqui.
- (13) Determineu el temps necessari per què un capital al 12% simple anual es quadrupliqui.
- (14) Calculeu el temps que triga un capital en duplicar-se al 5% d'interès simple anual

8.3 El descompte comercial

Una **lletra de canvi** i un **pagaré** són documents en els quals es manifesta un compromís escrit per al pagament d'una quantitat de diners en una data determinada de venciment.

En aquests documents solen constar els conceptes següents:

- **Import o valor nominal:** Quantitat de diners, es representa mitjançant la lletra N .
- **Deutor o lliurat:** persona que ha de pagar l'import.
- **Creditor o lliurador:** persona que emet el document.
- **Data d'emissió o data de lliurament:** data del document.
- **Data de venciment:** data en que s'ha de pagar el deute.
- **Termini:** temps entre la data del document i la data de venciment.

Si el creditor necessita els diners en efectiu abans de la data de venciment, pot buscar-se un intermediari financer que li compri la lletra de canvi a canvi d'un **descompte** en la quantitat que ha d'abonar pel pagaré.

Per tant, el creditor rebrà pel document un **valor efectiu** E , resultat de restar el **descompte** D del **nominal** N :

$$E = N - D$$

El D són els interessos que produeix el nominal N , a una taxa d'interès simple, des del moment de la compra del document fins a la data del seu venciment. Per tant, podem escriure:

$$D = N \cdot i \cdot t \quad E = N - D = N - N \cdot i \cdot t = N (1 - i \cdot t)$$

- (15) Una lletra de canvi de 1500€ es descompta el 8% 60 dies abans del seu venciment. Calcula'n el descompte i l'efectiu.
- (16) Per una lletra de canvi de 6600€ amb venciment al cap de 30 dies s'abonen 6567€. Quina taxa d'interès s'ha cobrat?
- (17) Per una lletra de canvi de 7 500€, amb venciment al cap de 30 dies, i amb descompte comercial, s'abonen 7 425€. Quina taxa d'interès s'ha cobrat?
- (18) Calculeu el descompte comercial i l'efectiu d'una lletra de 259 637€ al 10% avançada en 40 dies.
- (19) Una lletra de canvi de 1 250€ es descompta al 8% 60 dies abans del seu venciment. Calcula'n el descompte comercial i l'efectiu.
- (20) Calculeu el descompte racional i l'efectiu d'una lletra de 180 304€ al 15% anual avançada 70 dies.
- (21) Calculeu el valor efectiu que s'obté al descomptar l'1 de novembre una lletra de 156 263€ amb descompte comercial al 9% anual i venciment l'11 de desembre. (any comercial = 360 dies)
- (22) Calculeu el nominal d'una lletra amb descompte comercial i venciment el 31 de maig , que descomptada l'1 de maig al 12% va donar un efectiu de 33 320€. (any comercial).
- (23) Un crèdit de 540 911€ descomptat comercialment al 8% ha produït un efectiu de 533 699€.Quant de temps es va anticipar en el pagament?
- (24) Calculeu el descompte comercial i l'efectiu d'una lletra de 259 637€ al 10% avançada en 40 dies.
- (25) Calculeu el descompte racional i l'efectiu d'una lletra de 180 304€ al 15% anual avançada 70 dies.

8.4 Interès compost

Si col·loquem 4000€ en una llibreta a termini durant 3 anys i la cooperativa financera garanteix una taxa d'interès anual del 5%. Quin serà el capital després de 3 anys?

Si al final de cada any es retiren els interessos produïts en aquest període, és a dir, l'operació es realitza a l'interès simple, el capital final serà de:

$$C_t = C_0(1 + it) = 4000€ \cdot (1 + 0,05 \cdot 3) = 4600€$$

Ara suposem que en finalitzar el primer any no es retiren els interessos generats durant aquest període. A la llibreta hi haurà: $4000€ \cdot (1 + 0,05 \cdot 1) = 4000€ \cdot 1,05 = 4200€$.

És a dir, els 4000€ dipositats inicialment més els 200€ d'interessos que s'han generat durant aquest primer any.

Quan s'acabi el segon any, a la llibreta hi haurà: $4200€ \cdot (1 + 0,05 \cdot 1) = 4200€ \cdot 1,05 = 4410€$

I quan s'acabi el tercer any, si tampoc retirem els interessos acumulats, quan acabi el tercer any el capital serà de:

$$4410€ \cdot (1 + 0,05 \cdot 1) = 4410€ \cdot 1,05 = 4630,5€$$

Escrivim aquests resultats en una taula:

Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
1	4000	200	4200
2	4200	210	4410
3	4410	220,50	4630,50

D'aquesta manera observem que els interessos anuals van augmentant ja que per calcular els interessos que obtenim anualment fem servir la quantitat acumulada. En l'interès compost, els períodes de temps que s'estableixen s'anomenen **períodes de conversió** o **períodes de capitalització**. Aquests períodes acostumen a ser d'una any.

Com heu pogut comprovar, si el període d'imposició és de més d'una any, i tenim un mateix capital inicial, una mateixa taxa d'interès anual i un mateix temps, els interessos generats per un interès compost són més grans que per un interès simple.

Si tenim un capital inicial, C_0 que l'invertim a interès compost a una taxa anual i durant t anys, volem saber quin capital acumulat i interessos obtindrem. Si anem calculant la quantitat acumulada de cada any a partir de la quantitat de l'any anterior, anirem obtenint les quantitats següents any per any:

$$\begin{aligned}C_1 &= C_0(1 + i) \\C_2 &= C_1(1 + i) = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2 \\C_3 &= C_2(1 + i) = C_0(1 + i)^2(1 + i) = C_0(1 + i)^3\end{aligned}$$

Per obtenir de forma general la quantitat següent:

$$C_t = C_0(1 + i)^t$$

I per obtenir els interessos generats, només cal restar al capital final el capital inicial:

$$I = C_t - C_0 = C_0(1 + i)^t - C_0 = C_0((1 + i)^t - 1)$$

- (26) Invertim 6000€ a una taxa d'interès del 2% anual durant 10 anys. Troba el capital final de l'operació suposant que es realitzi a interès simple i a interès compost.
- (27) Si considerem un interès compost quin capital has d'invertir al 1,5% anual perquè en 3 anys i mig es converteixin en 4213,97€. 4000€
- (28) A quin taxa d'interès anual has d'invertir 3500€ perquè en 4 anys generin uns interessos de 363,35€, si en finalitzar cada any els interessos produïts s'acumulen al capital que hi havia en iniciar-lo? 2,5%
- (29) Si tenim un capital de 2500€ en un dipòsit de Coop57 (Cooperativa de sistema financer ètica), a una taxa anual del 2,5% d'interès compost, calcula el temps que cal tenir-ho dipositat perquè produeixi uns interessos de 328,52€.
- (30) Un barra de pa de $\frac{1}{4}kg$ ara costa uns 0,90€. Si cada any s'incrementa un 2,5% de mitjana, quan costarà una barra de pa d'aquí 4 anys?
- (31) Completa la següent taula d'evolució d'un capital de 600€ al 8% d'interès compost anual al llarg de 7 anys, i compara el resultat amb l'exercici semblant l'apartat d'Interès Simple.

Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

- (32) Fa quatre anys vaig prestar 60 101€ al 8% anual compost. Quin capital obtindré dintre de dos anys?

- (33) Quant de temps vaig invertir un capital de 360 607€ al 4% anual compost per obtenir un muntant de 474 535€ ?
- (34) Calculeu la taxa unitària anual si se sap que un capital de 150 253€ invertit en règim d'interès compost durant 6 anys dóna un muntant de 201 353€
- (35) Determineu el capital inicial que invertit al 8% anual en règim compost durant 15 anys produeix un muntant de 203 079€.
- (36) Determineu el sou mensual que tindrà una persona dintre de 10 anys (que ara és de 601€) si l'augment és del 7% anual acumulatiu.
- (37) Quina és la taxa d'interès compost trimestral equivalent al 6% semestral?
- (38) Un capital de 270 455€ s'inverteix al 7% anual compost. Calculeu el temps que necessita per obtenir un muntant de 379 328€.
- (39) Amb una taxa d'inflació anual acumulativa del 6%, quant valdrà a l'any 2010 un euro de l'any 2002 ?
- (40) Dos capitals iguals invertits al 6% i 8% anual compost durant 4 i 5 anys respectivament, produeixen uns interessos on la seva diferència és de 124 320€. Calculeu el capital invertit per cadascun d'ells.
- (41) Calculeu el muntant que s'obté d'invertir un capital de 18 030€ al 12% nominal quadrimestral compost durant 2 anys.
- (42) Calculeu el muntant que s'obté d'invertir 15 025€ al 8% d'interès anual si ho fem de les dues maneres següents:
 (a) A interès simple durant (6 mesos, 1 any , 2 anys)
 (b) A interès compost durant (6 mesos, 1 any , 2 anys)
- (43) Trobeu el muntant obtingut d'invertir 6 010 121€ durant 4 anys en règim compost els casos següents: a) al 8% anual. b) al 8% nominal semestral. c) al 4% semestral.
- (44) He participat en un fons d'inversió amb un capital de 1 803 036€ i als 10 dies recupero un muntant de 1 809 468€. Calculeu: a) La taxa d'interès compost diari que s'ha produït. b) La taxa efectiva anual que ha resultat.

8.5 Equivalències de taxes d'interès

Obtenim els mateixos rendiments si invertim 2500€ a interès simple, al 3% quadrimestral durant 4 anys que si es fa al 9% anual durant el mateix període de temps?

La resposta és si. Anem a comprovar-ho.

Interessos al cap de 4 anys per un capital de 2500€ al 3(4 mesos), durant 4 anys. Per tant, són 12 períodes perquè 3 vegades l'any per 4 anys són 12.

$$I = 2500€ \cdot 0,03 \cdot 12 = 900$$

I en canvi, els interessos al cap de 4 anys per un capital de 2500€ al 9% anual durant 4 anys:

$$I = 2500€ \cdot 0,09 \cdot 4 = 900$$

En canvi, si fem els mateixos càlculs però per un interès compost, les coses ja no surten igual.

En el primer cas:

$$I = 2500€ (1,03^{12} - 1) = 1064,40€$$

I en el segon cas:

$$I = 2500€ (1,09^4 - 1) = 1028,95€$$

Per tant, observem que no s'obtenen els mateixos interessos quan utilitzem l'interès compost.

Per tant, es diu que dues taxes d'interès són **equivalents** quan, aplicades al mateix capital inicial durant un període de temps igual, produeixen els mateixos interessos i, en conseqüència, el mateix capital final.

8.5.1 Interès Simple

Volem comparar els interessos que generen el mateix capital C_0 durant t anys amb una taxa d'interès anual i , dividint l'any en f períodes iguals, durant el mateix temps a una taxa d'interès i_f .

Els interessos que generaran seran:

$$I = C_0 i t \quad I' = C_0 i_f f t$$

Si volem que les taxes d'interès siguin iguals, igualem i aïllem i_f en funció de i_f :

$$I = I' \Leftrightarrow C_0 i t = C_0 i_f f t \Leftrightarrow i = i_f t \Leftrightarrow i_f = \frac{i}{f}$$

- (45) Un capital prestat a interès simple al 10% anual, en 190 dies va produir un muntant de 94 910€. Trobeu aquest capital. R: 90 152€
- (46) Hem col·locat un capital a interès simple del 6% anual durant 120 dies i del muntant obtingut l'hem tornat a col·locar al 4% anual simple durant 180 dies produint un muntant de 8 754€. Trobeu el capital inicial. R: 8 414€
- (47) S'han prestat 540 911€ a règim d'interès simple durant 150 dies al 12% anual. Quins interessos han devingut? R: 27 045,5€
- (48) Un capital de 24 040€ prestat a interès simple 6 anys 3 mesos i 4 dies han produït uns interessos de 3 005€. Calculeu la taxa anual del préstec. R: 2%
- (49) A quina taxa d'interès simple anual s'ha de prestar un capital durant 10 mesos per obtenir uns interessos iguals a la cinquena part del capital prestat. R: 20%
- (50) Un banc ens assegura uns interessos de 780€ si obrim una llibreta a termini amb 24 000€ des del 15 de Juny fins a final d'any. Quina és la taxa d'interès anual si l'operació és a interès simple? R: 6%
- (51) Es col·loquen 30 000€ en una entitat financera, durant 3 anys i 8 mesos a règim simple, amb un interès unitari mensual del 0,003. Calculeu el capital final o muntant. R: 33 960€

8.5.2 Interès Compost

Farem els mateixos passos que l'anterior apartat.

Un capital C_0 invertit durant t anys a una taxa d'interès anual i i el mateix capital col·locat durant el mateix temps a una taxa d'interès i_f , corresponent a la divisió d'una any en f períodes de temps, produeixen els interessos següents:

$$C_t = C_0(1+i)^t \quad C'_t = C_0(1+i_f)^{ft}$$

Si volem que totes dues taxes siguin equivalents i aïllem i_f obtenim:

$$C_t = C'_t \Leftrightarrow C_0(1+i)^t = C_0(1+i_f)^{ft} \Leftrightarrow (1+i)^t = (1+i_f)^f$$

Prenem logaritmes a les dues bandes de la igualtat i apliquem la propietat del logaritme d'una potència:

$$\log(1+i)^t = \log(1+i_f)^{ft} \Leftrightarrow t \log(1+i) = t \log(1+i_f)^f \Leftrightarrow \log(1+i) = \log(1+i_f)^f$$

Si ara elevem 10 amb els dos termes de la igualtat, al ser la funció inversa de log ens queda:

$$1 + i = (1 + i_f)^f \Leftrightarrow i_f = \sqrt[f]{1 + i} - 1$$

- (52) A interès compost, quina és la taxa anual equivalent a una taxa quadrimestral del 3%?
- (53) A interès compost, quina és la taxa trimestral equivalent a un 6% anual?
- (54) Calcula la taxa d'interès semestral que equival a una taxa d'interès anual del 10%. Considera les dues possibilitats: a interès simple i a interès compost.
- (55) Es col·loquen 30 000€ en una entitat financera, durant 3 anys a règim compost, capitalizable mensualment amb un interès mensual unitari de 0,004867. Calculeu el capital final o muntant.

8.6 Taxes d'interès anual amb períodes de capitalització inferiors a un any

En operacions amb interès compost, encara que la taxa estigui fixada anualment, el període de capitalització pot ser inferior a un any.

Suposem que s'han invertit 2000€ al 3% anual durant 2 anys. Si la capitalització és anual, el capital final serà:

$$C_t = 2000€ \cdot 1,03^2 = 2121,80€$$

Però si canviem l'acumulació d'interessos a semestral els interessos canvien. Sabem que 1 any = 12 mesos, per tant, cada semestre s'ha acumulat la meitat dels interessos que es produirien els 2000€ invertits al 3% durant un any:

$$2000€ \cdot \frac{0,03}{2}$$

Per tant, els 2000€ inicials es converteixen, després del primer semestre, en:

$$2000€ + 2000€ \cdot \frac{0,03}{2} = 2000€ \left(1 + \frac{0,03}{2} \right)$$

Finalment, observem que el capital es multiplica pel factor $1 + \frac{0,03}{2}$. Això vol dir que en finalitzar cadascun dels semestres, el capital que hi hagi en aquells moments es multiplicarà per aquest factor. Si en dos anys hi ha 4 semestres, això vol dir la quantitat de diners final serà:

$$C_t = 2000€ \cdot \left(1 + \frac{0,03}{2} \right)^4 = 2122,73€$$

Per tant, el capital final que obtenim al 3% anual amb capitalització semestral durant dos anys, és el mateix que s'obtindria si es col·loquessin al 1,5% semestral durant dos anys igual.

Si representem amb f la **frequència de capitalització**, com el nombre d'acumulacions que es produeixen al llarg d'una any, un capital C_0 , invertit a una taxa d'interès anual i amb f conversions anuals, durant un període de t anys, genera un capital final:

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{i}{f} \right)^{ft}$$

- (56) Determina la quantitat de diners que obtindràs si inverteixes 3500€ al 4% anual durant 5 anys amb:
- (a) Període de conversió quadrimestral
- (b) Període de conversió semestral

(c) Període de conversió anual

- (57) Calcula els interessos que generen 2500€ que s'inverteixen al 4,5% anual durant 10 anys i que es capitalitzen semestralment.
- (58) Un client inverteix 900€ a un 3% d'interès anual, amb un període de capitalització trimestral, i obté uns interessos de 176,77€. Determina el temps de procés.
- (59) Calcula els interessos que produeixen 1000€ col·locats al 2,5% anual amb períodes de capitalització: anual, semestral, quadrimestral, trimestral i mensual. Expressa la solució omplint una taula com la següent:

Període de Capitalització	Capital després d'un any(€)	Interessos en un any(€)
Anual	1025	25
Semestral	1025, 16	25, 16
Quadrimestral	1025, 21	25, 21
Trimestral	1025, 24	25, 24
Mensual	1025, 29	25, 29

- (60) Trobeu la taxa unitària mensual equivalent a una taxa trimestral del 0,9% a règim simple i compost. R: Simple $i_{12} = 0,003$, Compost $i_{12} = 0,002991$
- (61) Calculeu la taxa unitària mensual efectiva a règim simple i compost que correspon a un interès efectiu anual del 6%. R: Simple $i_{12} = 0,003$, Compost $i_{12} = 0,004867$
- (62) Calculeu la taxa unitària mensual efectiva a règim compost que correspon a un interès NOMINAL amb freqüència mensual del 6%. R: $i_{12} = 0,003$
- (63) Donada una taxa d'interès anual efectiva del 8%, calculeu les taxes nominals amb freqüència trimestral i mensual. R: $J_{12} = 7,72\%$ i $J_4 = 7,768\%$

8.7 Taxa nominal i taxa anual equivalent (TAE)

Com hem comprovat en els exercicis anteriors, si augmentem la freqüència de capitalització llavors els interessos augmenten. Per això, ens cal diferenciar la taxa anual teòrica de la real. La taxa anual teòrica s'anomena **taxa nominal** i la taxa anual real s'anomena **TAE, taxa anual equivalent**.

Per tant, en qualsevol operació comercial, podem calcular el seu TAE, i com més alt és, més interessos generarà.

Veiem com calcular el TAE per una operació. Si tenim un capital inicial, C_0 a una taxa nominal i amb freqüència de capitalització f , al final de l'any tindrem:

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{i}{f}\right)^f$$

I llavors el TAE:

$$\text{TAE} = \frac{C_t - C_0}{C_0} = \frac{C_0 \left(1 + \frac{i}{f}\right)^f - C_0}{C_0} = \frac{C_0 \left(\left(1 + \frac{i}{f}\right)^f - 1\right)}{C_0}$$

Per tant,

$$\text{TAE} = \left(1 + \frac{i}{f}\right)^f - 1$$

- (64) Calcula el TAE de les taxes nominals següents:

- (a) 7% amb període de conversió trimestral.
- (b) 3,5% amb període de conversió semestral.

- (c) 2,6% amb període de conversió mensual.
- (65) Una banca ètica holandesa ofereix un producte financer al 4,5% nominal, convertible a cada trimestre. Consisteix en una inversió en instal·lacions fotovoltaïques. Quin és el TAE de l'operació?
- (66) Un banc ofereix dues possibilitats d'inversió als seus clients. La primera opció estableix un 3,5% anual amb capitalització mensual i la segona un 5% anual amb abonaments quadrimestrals dels interessos. La primera consisteix en una inversió en la construcció d'uns avions militars equipats amb armament nuclear, i la segona inversió consisteix en la construcció d'una planta de biogas per generar electricitat a partir dels purins de granges de porcs. Quina creus que és la més avantatjosa?
- (67) Un compte té un TAE del 4,28%, si es desitja cobrar trimestralment, calculeu el interès trimestral equivalent. Sol. $I = 1,05\%$
- (68) Calcula el TAE equivalent a un interès del 0,5% mensual, tant per a interès simple com per a interès compost. Sol. a) TAE = NOMINAL = 6% b) TAE = 6,1677%
- (69) Calculeu el TAE de les taxes nominals següents: 76,3Sol. (a) 7,23% (b) 6,40% (c) 7,37%
- (70) Una entitat bancària ofereix un producte amb un TAE del 5,46%. Calculeu la taxa d'interès nominal associat al període trimestral. Sol. 5,35%
- (71) Raoneu quin dels dos procediments financers següents és més favorable per a l'inversor i calculeu quina diferència hi ha entre els capitals acumulats. (a) Ingressar 3000€ a un interès simple del 8% anual durant 10 anys. (b) Ingressar 3000€ a un interès compost del 7% anual durant 10 anys. Sol. (a) 5400€ (b) 6476,77€
- (72) Donada una taxa nominal amb freqüència mensual del 8% calculeu la taxa efectiva anual TAE. R: TAE = 8,299%

8.8 Concepte general d'anualitat

Una **anualitat** és una quantitat de diners que es paga periòdicament a una entitat financera amb dues finalitats possibles: acumular capital o saldar un deute. Pot ser per diverses causes: pla de jubilació, compra de vivenda, deixar capital en herència als seus fills, per una fundació benèfica, ...

Consisteix en ingressar una quantitat de diners periòdicament. Aquesta quantitat es coneix amb el nom d'**anualitat de capitalització**.

Però si el que hem fet és demanar un préstec o una hipoteca, llavors per pagar el deute cal pagar periòdicament una quantitat a l'entitat que ens ha deixat els diners, i aquesta quantitat es coneix amb el nom d'**anualitat d'amortització**.

8.8.1 Anualitats de capitalització

Les **anualitats de capitalització** són quantitats de diners iguals que s'ingressen al principi de cada any en una entitats financera per formar, juntament amb els interessos compostos que van generant, un determinat capital després d'un cert nombre d'anys.

Si generalitzem aquest procés, disposem d'una anualitat A durant t anys a un interès anual i , això ens genera un capital C :

$$C = A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^t = A(1+i) [1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{t-1}]$$

Sabem que

$$1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{t-1} = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

i llavors podem simplificar l'expressió anterior per

$$C = A(1+i) \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

8.8.2 Anualitats d'amortització

Una **anualitat d'amortització** és una quantitat que es paga al final d'un any a una entitat financera per disminuir el deute pendent. Aquesta quantitat disminueix el deute que tenim amb l'entitat financera i també els interessos compostos que l'entitat cobra pel préstec.

Per cancel·lar un deute D en un termini de t anys a una taxa d'interès anual i , caldrà pagar, en finalitzar cada anys, una anualitat a tal que:

$$D(1+i)^t = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{t-1} = a \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Per tant,

$$a = \frac{Di(1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

Com sempre cal que la taxa d'interès i el temps estiguin en correlació. És a dir, que si parlem de trimestres, els dos valors siguin en unitats de trimestres. Tot i això, el més normal és que tinguem la taxa d'interès fixa i els venciments per tornar un préstec no tinguin un periodicitat anual.

Si f és el nombre de pagaments en un any, t el temps en anys, la quota que hem de pagar és:

$$a = \frac{D \frac{i}{f} \left(1 + \frac{i}{f}\right)^{ft}}{\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{ft} - 1}$$

Quan es retorna un préstec, el que es retorna és la suma del valor del préstec (**Quota d'Amortització**) i dels interessos (**Quota d'Interès**).

$$\text{Anualitat} = \text{Quota d'Amortització} + \text{Quota d'Interès}$$

L'anualitat és una quantitat fixa, però les dues quotes varien cada any. Sovint es detallen les anualitats amb els diferents conceptes:

- **Quota d'interès:** taxa d'interès i aplicada al capital pendent.
- **Quota d'amortització:** anualitat menys quota d'interès.
- **Capital amortitzat:** capital ja amortitzat més última quota d'amortització.
- **Capital pendent:** valor del préstec menys capital amortitzat.

Exemple:

Suposem que tenim un préstec de 20 000€ amb un tipus d'interès del 10% anual a 4 anys. El deute és de

$$20\,000(1+0,10)^4\text{€} = 29\,282\text{€}$$

I l'anualitat serà

$$a = \frac{20\,000 \cdot 0,10(1+0,10)^4}{(1+0,10)^4 - 1} = 6\,309,42$$

Per tant el quadre d'amortització corresponent al préstec és el següent:

Temps	Anualitat (€)	Quota d'in- terès (€)	Quota d'amor- tizació (€)	Capital amortitzat (€)	Capital pendent (€)
0	-	-	-	-	20 000
1	6 309,42	2 000	4 309,42	4 309,42	15 690,58
2	6 309,42	1 569,06	4 740,36	9 049,78	10 950,22
3	6 309,42	1 095,02	5 214,40	14 264,18	5 735,82
4	6 309,42	573,58	5 735,84	20 000,02	-

- (73) Una persona vol comprar-se un cotxe d'aquí 4 anys, vol ingressar unes quotes trimestrals constants a un TAE o interès efectiu del 4,8% per aconseguir els 27 500€ que creu necessaris. Calculeu la quota.
- (74) S'estableix un pla de pensions de la següent manera: l'1 de gener de cada any ingressa 3 600€ al 4,5% anual. Quin capital haurà acumulat al cap de 35 anys.
- (75) Un comerciant inicia un pla d'estalvis amb un TAE del 10%, ingressant al principi de cada mes 150€. Calculeu el capital acumulat al cap de: (a) 20 anys (b) 30 anys.
- (76) Un treballador té 39 anys i decideix jubilar-se als 60 anys. Decideix fer un pla de pensions amb quotes anuals amb un TAE del 6,5% a partir dels 40 anys. Si vol acumular un capital de 270 000€, calculeu: (a) Valor de la quota (b) Capital aportat (c) Interessos obtinguts.
- (77) Un cotxe es paga durant 4 anys, amb les condicions següents: una entrada de 2 500€ i unes quotes trimestrals de 457,50€ amb un interès nominal trimestral del 10,8%. Quin és el preu del cotxe?
- (78) Un equip de música professional que costa 3 574,50€ es paga en 11 quotes trimestrals amb un interès nominal trimestral del 9,3%. Calcula la quota i la quantitat total que haurem pagat per l'equip.
- (79) No recordo quant de temps fa que vaig posar 10 000€ al banc a un interès compost anual que ara tampoc puc recordar. Aquest matí he anat al banc i m'han dit que si ara retirés els diners em donarien 13 310€, però que si espero 2 anys me'n donaran 16 105,10€. Calculeu l'interès anual que em paga el banc i els anys que fa que hi tinc els diners. Digueu també quin interès mensual equivalent m'hauria de pagar el banc a partir d'ara si demano que m'abonin els interessos cada mes.
- (80) En un banc ofereixen dues possibilitats als seus clients per cobrar els interessos. La primera consisteix en un 2,25% anual nominal que s'ingressa mensualment. L'altra possibilitat és un 2,4% nominal abonat trimestralment. Quina de les dues opcions és més avantatjosa per al client?
- (81) Una persona va obrir un compte d'estalvi el dia 1 de gener de 1994 al interès compost del 0,3 mensual. Va fer una imposició inicial de 600€. Des de llavors va anar ingressant 600€ en aquest compte el dia 1 de cada mes. El dia 1 de gener de 1996 ja no va ingressar les 600€, sinó que va treure tot el capital que tenia al compte. Amb el que va treure i un préstec que li va concedir el mateix banc aquell dia, es va comprar un cotxe de 23 000€. El import del préstec va ser justament la quantitat que li mancava per arribar al preu del cotxe. El préstec era de l'1% mensual, i s'havia de tornar en 18 mensualitats del mateix import, la primera de les quals s'havia de pagar l'1 de febrer de 1996. Calculeu el import de les mensualitats.
- (82) Una empresa ha de pagar a un proveïdor 2 500€ el 10 de juny de 2009, 10 000€ el 10 de juny de 2012, 7 500€ el 10 de juny de 2014 i 5 000€ el 10 de juny de 2015. El tipus d'interès anual compost efectiu és del 6%.
- (a) Quant hauria de pagar per eixugar el deute en un pagament únic el 10 de juny de 2008?
- (b) Quin és l'interès mensual equivalent al 6
- (c) Quant haurà de pagar per eixugar el deute en 36 pagaments mensuals del mateix import, el primer dels quals seria el 10 de juliol de 2008 i l'últim el 10 de juny del 2011? (Taxa anual equivalent = 6%)

- (83) Una noia té un préstec d'10 000€ al 7% d'interès compost anual durant 6 anys. Quina anualitat ha de pagar?
- (84) Una persona vol comprar un cotxe que val 25 000. Paga 7 500 al comptat i finança la resta a quatre anys i a un interès compost del 8% TAE.
- (a) Si paga en quotes anuals (la primera al cap d'un any d'haver pagat els 7 500€) quant ha de pagar cada any?
- (b) Quina és la taxa mensual equivalent a una TAE del 8%?
- (c) Si paga en quotes mensuals, quant ha de pagar cada mes?
- (85) Una persona decideix l'1 de gener de 2013, amb 57 anys d'edat, fer-se un pla de pensió per poder completar la jubilació que li correspondrà quan faci els seixanta-set anys. Al començament de cada any diposita un capital de 4.000€ i l'entitat financera li garanteix un interès compost anual del 6%. Quin capital recuperarà l'1 de gener del 2023 després d'haver fet l'última imposició l'1 de gener de l'any anterior?
- (86) El dia 15 d'abril de 2012 em van deixar 6 000€ a un interès compost anual del 8%. Haig de tornar aquest préstec en cinc anualitats del mateix import, la primera de les quals l'haig de pagar el 15 d'abril del 2013 i l'última el 15 d'abril del 2017.
- (a) Calculeu l'import q de les anualitats.
- (b) Per a cada un dels anys 2013, 2014 i 2015, calculeu la part de l'anualitat que es fa servir per pagar els interessos de l'any i la part que es destina a amortitzar capital. Calculeu el capital total amortitzat després de pagar l'anualitat i el capital pendent en aquell moment. Tot això ho podeu expressar omplint en el vostre quadern de respostes un quadre com el següent:

Any	Anualitat	Interessos Any	Amortització Anual	Capital Amortitzat	Capital Pendent
2013					
2014					
2015					

- (87) Calcula el valor actual d'una renta postpagable en deu períodes de 1 000€ cadascun al interès efectiu anual del 10%.
- (88) Trobeu el capital inicial que cal col·locar en un banc que capitalitza al 12% efectiu anual compost per obtenir una renta de 2 000€ al final dels pròxims 10 anys.
- (89) Calculeu l'import acumulat en un banc al termini de 8 anys si col·loquem 2 000€ al finalitzar cada any a un interès efectiu anual compost del 12%.
- (90) Calculeu el nombre d'ingressos que hem de realitzar al final de cada any amb un import de 2 500€ capitalitzable al 6% efectiu anual compost per obtenir al final un muntant de 20 985€.
- (91) Calculeu el valor actual i final d'una renta de 9 períodes anuals prepagables de 500€ cadascun al 10% efectiu anual compost.
- (92) S'ingressa una quota Q a l'inici de cada mes durant 20 anys a un interès efectiu anual del 8%. Calculeu el capital final o muntant.

8.9 Solucions als Problemes

- (1) (4)
- (2) (5)
- (3)

(6)	Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			

- (7) 3 anys (20) 5 110€ i 175 194€
- (8) 280 282€ (21) 154 700€
- (9) 15% (22) 33 657€
- (10) 64 900€ i 71 050€ (23) 60 dies
- (11) $I = 3,33\%$ (24) $D = 2 884€$ i $E = 256 753€$
- (12) 18,18 anys (25) $D = 5 109€$ i $E = 175 195€$
- (13) 25 anys (26) (a) 7 200€
- (14) 20 anys (b) 7 313,97€
- (15) $D = 120€$ i $E = 1380€$ (27) 4 000€
- (16) 6% (28) 2,5%
- (17) $D = 75I = 12\%$ (29) 328,52€
- (18) 2 885€ i 256 752€ (30)
- (19) $D = 16,65€$ $E = 1 233,35€$

(31)	Any	Quantitat Inicial(€)	Interessos(€)	Quantitat Acumulada(€)
	1			
	2			
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			

- (32) 95 372,73€ (44) (a) 0,0356164% (b) 13,88%
- (33) 7 anys (45) 90 152€
- (34) $i = 0,05$ (46) 8 414€
- (35) 64 019€ (47) 27 045,5€
- (36) 1 182€ (48) 2%
- (37) $i_4 = 0,129563$ (49) 20%
- (38) 5 anys (50) 6%
- (39) 1,593848€ (51) 33 960€
- (40) 601 012€ (52) $i = 0,092727$
- (41) 22 814€ (53) $i_4 = 0,01467$
- (42) (a) 15 626€, 16 227€, 17 429€ (54)
- (b) 15 614€, 16 227€, 17 525€ (55) 357 297,75€
- (43) (a) 8 176 703€ (56) (a) 4 269,26€
- (b) 8 225 226€ (b) 4 266,48€
- (c) 8 225 226€ (c) 4 258,29€

(57) 3901,27€

(58)

(59)	Període de Capitalització	Capital després d'una any(€)	Interessos en un any(€)
	Anual		
	Semestral		
	Quadrimestral		
	Trimestral		
	Mensual		

(60) Simple $i_{12} = 0,003$
 Compost $i_{12} = 0,002991$

(72) $TAE = 8,299\%$

(61) Simple $i_{12} = 0,003$
 Compost $i_{12} = 0,004867$

(73) 1 553,5€

(62) $i_{12} = 0,003$ (74) $C = 306\,590,28\text{€}$ (63) $J_{12} = 7,72\%$ i $J_4 = 7,768\%$

(75) (a) $C = 30\,982,80\text{€}$
 (b) $C = 114\,854,54\text{€}$

(64)

(76) (a) $q = 6\,650,71\text{€}$
 (b) $A = 133\,014,25\text{€}$

(65)

(c) $I = C - A = 141\,985,75\text{€}$

(66)

(77) Preu final: 12 835,40€
 Preu inicial: 8 380,70€

(67) $I = 1,05\%$

(68) (a) $TAE = \text{NOMINAL} = 6\%$
 (b) $TAE = 6,1677\%$

(78) $q = 372,02\text{€}$
 $C = 4\,092,22\text{€}$

(69) (a) 7,23%
 (b) 6,40%
 (c) 7,37%

(79) $i = 0,1$ $I = 10\%$ anual
 $i_{12} = 0,007974$ $I_{12} = 0,7974\%$

(70) 5,35%

(80) (a) $i_{12} = 0,001875$ $i = 0,02273$ $TAE = 2,273\%$

(71) (a) 5 400€

(b) $i_4 = 0,006$ $i = 0,02421$ $TAE = 2,421\%$

(b) 6 476,77€

És millor el segon

(81) (a) Renta prepagable d'import 600€ amb 24 impositcions al 0,3% mensual, $C_{24} = 14\,952,63\text{€}$.
 (b) Renta postpagable amb 18 mensualitats a l'1% mensual. Amb un capital inicial de $C_0 = 23\,000 - 14\,952 = 8\,048\text{€}$, $q = 491\text{€}$

(82) (a) $\frac{2500}{1,06} + \dots + \frac{5000}{1,06^7} = 18\,892\text{€}$ (b) $I_{12} = 0,4867\%$ (c) $q = 5\,143,46\text{€}$

(83) $q = 2\,098\text{€}$

(84) (a) $q = 5\,283,52\text{€}$
 (b) $i_{12} = 0,006434$
 (c) $q = 425\text{€}$

(85) $C = 55\,886\text{€}$ (86) (a) $q = 2\,328,20\text{€}$

(b)	Any	Anualitat	Interessos Any	Amortització Anual	Capital Amortitzat	Capital Pendent
	2013	2329	480	1849	1849	4151
	2014	2329	332	1997	3846	2154
	2015	2329	174	2155	6002	-2

(87) 6 144,56€

(88) $C = 11\,300,45\text{€}$

(89) $C_8 = 24\,600\text{€}$

(90) $n = 7$ anys

(91) $C_0 = 3\,167,46\text{€}$, $C_9 = 7\,468,71\text{€}$

(92)

$$C_t = Q(1 + i_{12}) \frac{[(1 + i_{12})^{240} - 1]}{i_{12}} \quad i_{12} = \sqrt[12]{1,08} - 1 = 0,006434$$

Capítol 9

Progressions i Successions

Comencem amb la definició que trobem a la **Wikipedia**:

“En matemàtiques, una successió és una llista ordenada d'objectes. Més formalment, s'anomena successió una aplicació definida en el conjunt dels nombres naturals, o un subconjunt seu, i que pren valors en un conjunt arbitrari. Si aquest altre conjunt és el dels nombres reals es diu que és una successió de nombres reals.”

És una llista ordenada d'objectes. Nosaltres ens centrarem en una llista ordenada de nombres reals. Per exemple:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

Podem generar tantes successions com vulguem i de les formes que vulguem:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots$$

Però per poder-les estudiar, abans cal aprendre a crear-ne i inventar-ne. Per això utilitzarem l'scratch i aprendrem a programar per crear successions.

9.1 Definició

Una **successió** és un conjunt ordenat de nombres reals:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

Cada element de la successió es diu **terme** de la successió. Per escriure'ls es fan servir subíndexs. Els termes de les successions es poden determinar a partir d'un determinat criteri, que es diu **regla de formació**.

Fixa't en aquest parell de successions:

Exemple 1

$$4, 7, 10, 13, \dots$$

Primer terme: $a_1 = 4$

Segon terme: $a_2 = 7$

Tercer terme: $a_3 = 10$

Quart terme: $a_4 = 13$

Cada terme s'obté de l'anterior
sumant-li 3:

$$a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$$

...

$$4, 8, 12, 16, \dots$$

Cada terme s'obté multiplicant el lloc
que ocupa per 4:

$$a_1 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$a_2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$a_3 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$a_4 = 4 \cdot 4 = 16$$

...

9.2 Terme General d'una successió

Diem **terme general** d'una successió al que ocupa qualsevol n , s'escriu a_n .

En algunes successions, el **terme general** és una expressió algebraica, que ens permet saber qualsevol terme de la successió si coneixem el lloc que ocupa, n .

En d'altres, cada terme s'obté a partir dels anteriors, es diu que estan donades en forma recurrent. Una **relació de recurrència** és una expressió algebraica, que dona el terme n en funció dels anteriors.

EXERCICIS

- (1) El primer terme d'una successió és 4. Escriu els seus quatre primers termes si: “Cada terme és igual a l'anterior més el lloc que ocupa”.
- (2) Escriu la regla de formació de la successió següent: 3, 8, 13, 18, ...
- (3) Escriu els cinc primers termes de la successió formada pels quadrats dels nombres naturals.
- (4) Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

- (5) Escriu els 5 primers termes d'una successió amb regla de formació: “Cada terme és la suma dels dos anteriors”, sabent que $a_1 = 3$ i $a_2 = 7$.
- (6) Escriu el terme general d'aquestes dues successions:

(a) 2, 3, 4, 5, 6, ...

(b) 2, 4, 8, 16, 32, ...

9.3 Successions Monòtones

Podem classificar una successió segons els elements que la componen en

- Successió **creixent**: Si $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- Successió **decreixent**: Si $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Direm que una successió és **monòtona** si la successió és creixent o decreixent. Cal dir que hi ha successions que no són ni creixents ni decreixents. Per exemple, la successió amb terme general:

$$a_n = (-1)^n n$$

és una successió que oscil·la, ja que els seus termes van canviant de signe:

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \dots$$

9.3.1 Fites

Direm que F és una **fita inferior** d'una successió si tots els termes de la successió són més grans o iguals que F .

$$a_n \geq F \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

I direm que la successió està **fitada inferiorment**.

Per exemple, la successió $a_n = 4n + 1$ està fitada inferiorment per $F = 5$, ja que la successió és: 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... i tots els membres són més grans o iguals que 5.

Definirem el mateix concepte per **fites superiors**.

Finalment, direm que una successió està **fitada** quan està fitada superiorment i inferiorment.

Exemple 2

Estudia la monotonia de la següent successió i digues si està fitada. $a_n = n^2 + 3n + 2$

Comparem dos termes consecutius a_n i a_{n+1} per veure si podem comprovar-ne la monotonia:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 = n^2 + 5n + 6$$

$$a_n = n^2 + 3n + 2$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 5n + 6 - (n^2 + 3n + 2) = 2n + 4$$

I per tant, si volem saber si $a_{n+1} - a_n = 2n + 4 > 0$ hem de resoldre la inequació, que ens dóna com a resultat que per a $n > -2$ sempre és veritat. I com que la n només pren valors positius, vol dir que podem assegurar que

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \implies a_{n+1} > a_n \quad \forall n$$

per tant, la successió és **monòtona creixent**.

Mirem ara si la successió té fita superior o inferior. Mostrem uns quants termes de la successió:

$$6, 12, 20, 30, 42, 54, \dots$$

Com podem comprovar la successió creix sense parar tal i com hem demostrat anteriorment.

Per tant, tots els termes seran més grans que el primer terme $a_1 = 6$. Llavors, podem dir que 6 és una fita inferior i, per tant, la successió està fitada inferiorment. Però no ho està pas, superiorment.

Exemple 3

Estudia la monotonia de la següent successió i digues si està fitada. $a_n = \frac{1}{2^n}$

Comparem dos termes consecutius a_n i a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \quad a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2^n} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2^{n+1}}$$

Per tant, podem dir que $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0 \quad \forall n$ i per tant

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad \forall n \implies a_{n+1} < a_n \quad \forall n$$

llavors la successió és **monòtona decreixent**.

Mirem ara si la successió té fita superior o inferior. Mostrem uns quants termes de la successió:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

Primer de tot, com que és monòtona decreixent podem assegurar que el primer terme sempre serà el més gran, per tant, $a_n \leq \frac{1}{2} \quad \forall n$. Per tant, $\frac{1}{2}$ és fita superior.

Finalment, si ens fixem, per més gran que sigui n , a_n sempre serà un valor positiu, és a dir, $\frac{1}{2^n} > 0 \quad \forall n$. Per tant, el 0 és fita inferior. Llavors podem dir que la successió està **fitada**.

9.4 Progressions Aritmètiques

Una progressió aritmètica és una successió en què cada terme (llevat del primer) s'obté sumant a l'anterior una quantitat fixa, d , que es diu **diferència** de la progressió.

Si $d > 0$ els nombres cada cop són més grans, es diu que la progressió és **creixent**.

Si $d < 0$ els nombres cada cop són més petits, es diu que la progressió és **decreixent**.

$$\begin{aligned} 7, 5, 3, 1, \dots &\longrightarrow d = -2 < 0 \longrightarrow \text{Decreixent} \\ 2, 5, 8, 10, \dots &\longrightarrow d = 2 > 0 \longrightarrow \text{Creixent} \end{aligned}$$

En una progressió aritmètica cada terme és igual a l'anterior més la diferència. Observa:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \end{aligned}$$

i així successivament, arribem a que el **terme general** d'una **progressió aritmètica** és:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

on a_1 és el primer terme i d la diferència.

Exemple 4

Sigui la següent successió: 3, 5, 7, 9, 11, ...

Observem que $a_1 = 3$ $d = 2$, per tant, podem deduir que el terme general és:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$$

D'aquesta manera, podem obtenir termes de la successió tant grans com vulguem:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 3 + 9 \cdot 2 = 21 \\ a_{100} &= 3 + 99 \cdot 2 = 201 \end{aligned}$$

Les progressions aritmètiques ens permeten poder calcular la suma de n termes que nosaltres vulguem. Això és degut a que en una progressió aritmètica finita de n termes, la suma de termes equidistants dels extrems és igual a la suma d'aquests extrems.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Si apliquem aquesta propietat s'obté que la **suma**, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, dels n **primers termes** d'una **progressió aritmètica**, és:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Exemple 5

Sigui la següent successió: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

I volem sumar aquests primers 6 termes. Sumem els extrems equidistants i comprovem que sumen el mateix:

$$\begin{aligned}2 + 12 &= 14 \\4 + 10 &= 14 \\6 + 8 &= 14\end{aligned}$$

Per tant,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 12}{2} \cdot 6 = 42$$

EXERCICIS

(7) Determina la diferència de les progressions aritmètiques següents:

(a) 1, 4, 7, 10, 13, ...

(b) 8, 6, 4, 2, 0, ...

(c) 2, 6, 10, 14, 18, ...

(8) Escriu el terme general de les progressions aritmètiques següents:

(a) 4, 6, 8, 10, ...

(b) 3, -1, -5, -9, ...

(c) 5, 8, 11, 14, ...

(9) Calcular la suma dels 10 primers termes de la progressió aritmètica: 2, 4, 6, 8, 10, ...

(10) Calcular la suma dels 20 primers termes de la progressió aritmètica: 3, 7, 11, 15, 19, ...

(11) El primer terme d'una progressió aritmètica de diferència 5 és 4 i l'últim terme és 499. Calcula la suma de tots els termes.

9.5 Progressions Geomètriques

Una **progressió geomètrica** és una successió en què cada terme (llevat del primer), s'obté multiplicant l'anterior per una quantitat fixa r , que es diu **raó** de la progressió.

La raó s'obté en fer el quocient entre dos termes consecutius:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Exemple 6

Sigui la següent successió: 3, 6, 12, 24, 48, ... , comprovem que té raó=2:

$$r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = 2$$

En una progressió geomètrica cada terme és igual a l'anterior multiplicat per la raó:

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 \cdot r \\a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3\end{aligned}$$

I si seguim així s'obté el **terme general d'una progressió geomètrica** de primer terme a_1 i raó r és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Exemple 7

Sigui la següent successió: 1, 3, 9, 27, 81, ... ,

Comprovem que té $r = 3$ i el primer terme és $a_1 = 1$, per tant, el terme general serà $a_n = 3^{n-1}$.

9.5.1 Tipus de progressions geomètriques

Segons el valor de la raó, r , podem tenir diferents tipus de progressions:

- Si $r > 1$, la progressió és una successió creixent.
- Si $0 < r < 1$, la progressió és una successió decreixent.
- Si $r = 1$, la progressió és una successió constant.
- Si $r < 0$, els termes de la progressió alternen el signe positiu i negatiu.

9.5.2 Suma d' n termes d'una progressió geomètrica

En aquest cas també podem calcular la **suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica** de raó r .

Si considerem la suma dels primers n termes de la successió:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

I multipliquem cada un dels termes per la raó r , obtenim:

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_n \cdot r$$

Si restem les dues igualtats anteriors, obtenim:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 \implies S_n(r - 1) = a_n \cdot r - a_1 \implies S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Exemple 8

Sigui la següent successió: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... , obtenim que té $r = 2$, i volem sumar els primers 6 termes de la successió. Per tant, $n = 6$ i:

$$S_6 = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{63}{1} = 63$$

9.5.3 Producte d' n termes d'una progressió geomètrica

A més a més, en el cas d'una progressió geomètrica, podem calcular el producte dels n primers termes de la progressió. Es pot calcular el producte a causa de que el producte dels termes equidistants dels extrems és igual al producte dels extrems:

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$$

El resultat del producte dels primers n termes d'una progressió geomètrica és:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exemple 9

Sigui la següent successió: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... , en volem calcular el producte dels 6 primers termes. Primer comprovem que el producte dels termes equidistants dels extrems és igual al producte dels extrems:

$$1 \cdot 32 = 32 \quad 2 \cdot 16 = 32 \quad 4 \cdot 8 = 32$$

$$P = \sqrt{(1 \cdot 32)^6} = \sqrt{2^{30}} = 2^{15}$$

EXERCICIS

(12) Determina la raó de les progressions geomètriques següents:

(a) 1, 2, 4, 8, 16, ...

(b) 81, 27, 9, 3, 1, ...

(13) Escriu el terme general de les progressions geomètriques següents:

(a) 4, 12, 36, 108, ...

(b) 8, 16, 32, 64, ...

(14) Calcula la suma dels 10 primers termes de la progressió geomètrica: 1, 2, 4, 8, 16, ...

(15) Calcula la suma dels termes d'una progressió geomètrica finita de primer terme 1, raó 3 i últim terme 243.

(16) Calcula la suma de tots els termes de la progressió geomètrica: 8, 4, 2, 1, ...

(17) Calcula el producte dels 8 primers termes de la progressió geomètrica: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

9.6 Límits d'una successió

Ara volem saber quin és el comportament d'una successió quan prenem valors de n molt grans. Per exemple si prenem la successió

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

i en calculem uns quants valors, observem:

a_1	$\frac{1}{2}$	0,5
a_2	$\frac{1}{4}$	0,25
a_3	$\frac{1}{8}$	0,125
a_4	$\frac{1}{16}$	0,0625
a_5	$\frac{1}{32}$	0,03125
a_6	$\frac{1}{64}$	0,015625
a_7	$\frac{1}{128}$	0,0078125
a_8	$\frac{1}{256}$	0,00390625
a_9	$\frac{1}{512}$	0,001953125
a_{10}	$\frac{1}{1024}$	0,0009765625

a_{100}	$\frac{1}{2^{100}}$	7,888609052210118054117285652827862296732064351090 $230047702789306640625 \cdot 10^{-31}$
a_{1000}	$\frac{1}{2^{1000}}$	9,332636185032188789900895447238171696170914463717 08024621714339795966910975775634454440327097881102 35959498993032424262421548752135403239484152081720 39307562344106661383251502739950759859018315111004 90796265113118240512514795933790805178271125415103 81069837885442648111946981422866095922201766291044 27984561694488871474665280063283684526474292618298 62165202793195289493607117850663668741065439805530 71813632059984482604195410121322962986950219451460 99042146086683612447929520348268646176579269160474 20065936389041737895822118365078045556628444273925 38751712785479678155634640371487768176689985539206 92654394240087119736747017498626266907472967625358 03929376233833981046927874558605253696441650390625 $\cdot 10^{-302}$

Per tant, observem que la successió és decreixent, amb tots els termes positius i els valors d'aquests termes s'aproxima a zero a mesura que anem avançant en la successió.

Per tant, escriurem que

$$\{a_n\} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

i es llegirà que la **successió tendeix a zero** o que el **límit de la successió és igual a 0**.

Si ara prenem com a exemple la successió

$$a_n = \frac{3n^2}{2 + n^2}$$

comprovem quan val el seu límit. Calculem

$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = \frac{27}{11} = 2,45$	$a_5 = \frac{25}{9} = 2,7$	$a_{10} = \frac{150}{51} = 2,9412$	$a_{100} = \frac{15\,000}{5\,001} = 2,9994$	...
-----------	-----------	------------------------------	----------------------------	------------------------------------	---	-----

i veurem cap a on tendeix el valor de la successió. Al cap d'uns quants càlculs observem que aquest límit és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2 + n^2} = 3$$

Però si observem les diferències dels termes amb el límit, veurem que

$a_1 - 3 = -2$	$a_2 - 3 = -1$	$a_3 - 3 = -0,54$	$a_5 - 3 = -0,2$	$a_{10} - 3 = -0,0588$	$a_{100} - 3 = 0,0006$	...
----------------	----------------	-------------------	------------------	------------------------	------------------------	-----

Cada cop la diferència es va fent més i més petita. Per tant podem definir el límit l d'una successió a_n com si el valor absolut de la diferència entre un terme suficientment gran de la successió i l és tant petita com es vulgui.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

9.6.1 Successions Convergentes i Divergents

Si la successió té un límit i aquest límit és un valor real es diu que la successió és **convergent**.

Però ens podem trobar en successions que no tenen límit perquè són creixents sense fita superior, per exemple, $a_n = n$. Llavors direm que la successió té límit Infinit $(+\infty)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

També direm que la successió és **divergent**.

De la mateixa manera, si ens trobem amb una successió que decreix i que no té fita inferior. Llavors direm que la successió té límit $-\infty$. Per exemple, la successió $a_n = -n^2$.

En el cas de successions oscil·lants, ens podem trobar en casos que sí que tenim límit i casos en què no. El cas $a_n = (-1)^n$ no té límit perquè els seus valors van oscil·lant entre 1 i -1 . En canvi, la successió $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sí que té límit perquè tot i que va oscil·lant, els seus valors tendeixen a zero.

EXERCICIS

(18) Calcula uns quants termes de les següents successions i digues el seu límit:

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(g) $a_n = \frac{n^2 - 2}{2n^2 + 1}$

(b) $a_n = n^3$

(h) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$

(c) $a_n = 2n$

(i) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1}$

(d) $a_n = 2 \cdot 3^n$

(j) $a_n = \frac{n^4}{1 + n^4}$

(e) $a_n = \frac{1}{5^n}$

(f) $a_n = \frac{n + 1}{n - 1}$

9.7 Operacions amb Successions

9.7.1 Successió Suma

Considerem les dues successions següents:

$$a_n \rightarrow 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{n+1}, \dots \quad b_n \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Els termes de la successió suma d'aquestes dues successions els obtenim sumant els termes que ocupen la mateixa posició en cadascuna de les successions.

$$a_n + b_n \rightarrow \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{2}{n+1} + \frac{n}{n+1}, \dots$$

Per tant, el terme general de la successió suma quedarà com:

$$a_n + b_n = \frac{2}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

9.7.2 Successió Producte

Procedirem igual que l'anterior apartat. Multiplicarem terme a terme les dues successions que volem multiplicar i després deduirem el terme general considerant el producte dels termes generals de les dues successions que estem multiplicant.

$$a_n \cdot b_n \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{6}{16}, \frac{8}{25}, \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Per tant, el terme general de la successió producte és

$$a_n \cdot b_n = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{(n+1)^2}$$

La successió quocient $\frac{a_n}{b_n}$ només es pot definir si $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En la successió potència $a_n^{b_n}$, les successions a_n i b_n no poden anular-se el mateix moment.

9.8 Límits de Successions Convergentes

Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i llavors podem dir que

- El límit de la suma és suma de límits:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$$

- El límit del producte és producte de límits:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

- El límit del quocient és quocient de límits, excepte quan $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{si } b \neq 0$$

Les progressions geomètriques, podem dir que tenen límit i aquest val 0 si $0 < r < 1$ perquè el terme general és $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, per tant, r^n tendeix cap a zero quan n es fa gran.

9.8.1 Cas $b = 0$

Suposem que el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = 0$, i volem calcular el límit del quocient:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Hem de considerar diferents casos.

- Cas $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{0} = +\infty$$

Exemple 10

Siguin les successions $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ i $b_n = \frac{1}{n+1}$. Observem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

i per tant, el límit de la successió quocient és:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{0}$$

Per resoldre aquest límit, calculem el terme general de la successió quocient i intentem treballar-hi directament:

$$\frac{\frac{2n+1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{1} = 2n+1$$

que és una successió divergent i té límit ∞ . Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

- Cas $a < 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{0} = -\infty$$

- Cas $a = 0$: És una **indeterminació**! Dependrà de cada cas.

Exemple 11

Siguin les successions $a_n = \frac{1}{2n+1}$ i $b_n = \frac{1}{n+1}$. Observem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

i per tant, el límit de la successió quocient és:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{0}{0}$$

és una indeterminació. Per resoldre la indeterminació calculem el terme general de la successió quocient i intentem treballar-hi directament, com abans:

$$\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{n+1}{1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

que és una successió convergent i té límit $\frac{1}{2}$ si en calculem uns quants termes. D'aquesta manera hem resolt la indeterminació i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$$

9.9 Límits de Successions Divergents

Considerem ara que les dues successions a_n i b_n són divergents i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Podem assegurar els següents resultats:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = +\infty$ si $k > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = -\infty$ si $k < 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = +\infty$

Els problemes ens vénen quan intentem fer aquest tipus de límits, que no es poden determinar i esdevenen **indeterminacions**:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = +\infty - \infty$ Indeterminació!
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació!

Exemple 12

Siguin les successions $a_n = 2n^2 + 1$ i $b_n = n^2 + 3$. Observem que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$$

i per tant, el límit de la successió diferència és:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = \infty - \infty$$

és una indeterminació. Per resoldre la indeterminació calculem el terme general de la successió diferència:

$$a_n - b_n = 2n^2 + 1 - (n^2 + 3) = 2n^2 + 1 - n^2 - 3 = n^2 - 2$$

que és una successió divergent, però ja no és una indeterminació i podem calcular-ne el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 2 = +\infty$$

9.10 Càlcul de Límits

9.10.1 Límits de polinomis

Si tenim una successió $a_n = n^3 - 2n^2 + n$, si calculem el seu límit, obtenim el següent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - 2n^2 + n = \infty - \infty + \infty$$

i ens trobem davant d'una indeterminació. Però ho podem resoldre fàcilment fent el següent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - 2n^2 + n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n^2 - 2n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(n(n - 2) + 1) = +\infty \cdot (\infty \cdot (\infty)) = +\infty$$

que ens està dient que en un polinomi, el que marca el límit és el signe del coeficient del terme amb grau més alt. Per tant, podem assegurar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - 2n^2 + n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$$

9.10.2 Límits d'indeterminacions del tipus $\frac{\infty}{\infty}$

En aquest cas calculem els límits de fraccions algebraïques les quals ens dongui una indeterminació. Ens referim als casos $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. En aquest cas, el mètode serà dividir el numerador i el denominador per el terme de grau més gran sense el coeficient. Veiem-ho amb l'exemple següent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 3}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{n}{n^3} + \frac{3}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0 + 0}{0 + 0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Mirem un altre cas en que ens surt un resultat diferent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 1}{-n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3}{n^3} - \frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{-n^3}{n^3} + \frac{n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{-1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{-1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{2 + 0 + 0}{-1 + 0} = \frac{2}{-1} = -2$$

Per tant, el que farem a partir d'ara serà fixar-nos en els termes de grau més gran del numerador i el denominador i limitar-nos a fer el límit amb aquests termes. Si retornem a fer els dos límits anteriors, aquest cop el farem més directament:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 3}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - n^2 + 1}{-n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{-n^3} = -2$$

Observem que si el grau del numerador i del denominador són iguals, el límit és el quocient dels coeficients dels termes de grau més gran. I si el grau del numerador és més gran que del denominador el límit és ∞ .

Però què passa si el límit del numerador és més petit que el del denominador?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 3n^2 - n - 3}{-2n^7 + n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{-2n^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-2n^2} = 0$$

doncs que el límit és 0.

9.10.3 Límits d'indeterminacions del tipus $\infty - \infty$

Si ens demanem calcular el següent límit obtenim una indeterminació:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 1}{n^2} - \frac{2n^3 + 1}{2n^2} = \infty - \infty$$

El que hem de fer és simplificar tant com puguem abans de calcular el límit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 1}{n^2} - \frac{2n^3 + 1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2 - (2n^3 + 1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 - 2n^3 - 3}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{2 - 0}{0} = +\infty$$

Els casos més típics i complicats són quan en el límit surten radicals. Per exemple, calculem aquest límit i observem que hi ha una indeterminació:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} = \infty - \infty$$

En aquest cas, utilitzarem una tècnica que ens permetrà desfer-nos dels radicals. Com que tenim una resta, una manera de treure els radicals és elevar el quadrat i tal com hem fet en casos anteriors semblants, el que cal és utilitzar el conjugat. Per tant, multiplicarem i dividirem pel conjugat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n + 1})(\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n + 1})}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1 - (n^2 + n + 1)}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1 - n^2 - n - 1}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n - 2}{\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

9.10.4 Límits de potències

Ara estem en el cas en que hi ha potències.

- Cas en que la base és un valor real $k > 0$ i la potència és una successió.

Volem calcular el límit de la successió k^{a_n} .

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ llavors $\lim_{n \rightarrow \infty} k^{a_n} = k^a$.

En canvi, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ haurem de considerar el valor de la base k :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \begin{cases} k > 1 & \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^{a_n} = +\infty \\ 0 < k < 1 & \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^{a_n} = 0 \\ k = 1 & \longrightarrow \text{És una successió constant} \end{cases}$$

- La base i l'exponent són successions convergents.

Es calcula el límit per separat i després s'elevan els valors corresponentment.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^{\frac{3n+1}{6n}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{ja que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2 + 2} = 4 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{6n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En aquest cas, en el que tenim una successió elevada a una altra successió tindrem una nova indeterminació que es mereix una secció nova del tema. És la indeterminació que ve donada quan la successió que ve determinada per la base té límit 1 i la indeterminació per 1^∞ . El problema rau en que 1 és el límit i no sabem com de ràpid ens acostem a 1, i si ho fem amb números més grans o més petits que 1.

9.11 El nombre e

Sigui la successió:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

si en calculem uns quants termes, tenim els valors següents:

$a_1 = 2$	$a_2 = 2,25$	$a_3 = 2,37$	$a_4 = 2,441$	$a_5 = 2,488\,32$	$a_{100\,000} = 2,718\,268$
			$a_{1\,000\,000} = 2,718\,280\,469$	$a_{1\,000\,000\,000} = 2,718\,281\,827$	

En canvi, si substituïm directament la n per ∞ obtenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{\infty} \right)^\infty = (1 + 0)^\infty = 1^\infty$$

la qual cosa és una indeterminació. Però definirem aquest límit com a nombre e , el nombre d'Euler, d'aquesta manera:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,718\,281\,827$$

Així podrem calcular diferents límits amb aquest tipus d'indeterminació. En general, si tenim una successió que té com a límit $+\infty$ llavors podem calcular el següent límit d'aquesta manera:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$$

Per tant, per exemple tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2} \right)^{4n^2} = e$$

Exemple 13

Calcula el límit de la següent successió:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{2n} = 1^\infty \quad \text{És una indeterminació!}$$

Si ara canviem l'interior del parèntesis sumant i restant 1, obtenim una expressió molt semblant a la de la successió que té com a límit el nombre e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+4}{n+3} - 1 \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n+4}{n+3} - \frac{n+3}{n+3} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3} \right)^{2n}$$

Ara ens cal tenir l'exponent igual que el denominador per poder substituir el límit per el valor e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+3} \right)^{n+3} \right]^{\frac{2n}{n+3}}, \text{ llavors tenim que } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+3} \right)^{n+3} = e \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$$

Per tant, el límit que estem buscant és:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{2n} = e^2$$

9.12 Exercicis

(19) Completa les successions amb els termes que falten:

(a) 3, 7, 11, 15, ...

(c) 32, 16, 8, 4, ...

(b) 3, 6, 12, 24, ...

(d) 5, 10, 17, 26, ...

(20) Calcula els 4 primers termes de la successió de terme general:

(a) $a_n = n + 5$

(c) $a_n = \sqrt[n+1]{n+2}$

(b) $a_n = 2^{n-1}$

(d) $a_n = 5n$

(21) Calcula el terme general de les successions:

(a) 1, 2, 3, 4, 5, ...

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

(b) 1, 4, 9, 16, 25, ...

(d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

(22) Troba el terme 100 de la successió de terme general:

(a) $a_n = 3n + 2$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

(b) $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$

(23) Esbrina la llei de recurrència de cadascuna de les successions:

(a) 3, 7, 10, 17, 27, ...

(c) 3, 7, 11, 15, 19, ...

(b) 3, 6, 12, 24, 48, ...

(d) 9, 3, 6, -3, 9, ...

(24) Calcula el terme general de les progressions aritmètiques següents:

(a) 4, 7, 10, 13, 16, ...

(c) 7, 11, 15, 19, 23, ...

(b) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(d) 3, 4, 5, 6, 7, ...

(25) Calcula el terme general de les progressions geomètriques següents:

(a) 4, 8, 16, 32, 64, ...

(c) 16, 8, 4, 2, 1, ...

(b) 1, 3, 9, 27, 81, ...

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$

(26) Calcula la diferència d'una progressió aritmètica si se'n coneixen:

(a) $a_{10} = 30$ i $a_1 = -6$ (b) $a_{30} = 95$ i $a_{20} = 45$

(27) Calcula la raó d'una progressió geomètrica si se'n sap:

(a) $a_9 = 80$ i $a_8 = 16$ (b) $a_{10} = 40$ i $a_7 = 5$

(28) Calcula el primer terme d'una progressió aritmètica si se'n sap:

(a) $a_{20} = 34$ i $d = 7$ (b) $a_{31} = 13$ i $d = 3$

(29) Calcula el primer terme d'una progressió geomètrica si se'n sap:

(a) $a_7 = 320$ i $r = 2$ (b) $a_6 = 915$ i $r = 3$

(30) Calcula el nombre de termes d'una progressió aritmètica finita si el primer és 100, l'últim 420 i la diferència és 4.

(31) Calcula la suma dels primers 101 termes de la progressió: 1, 4, 7, 17, 20, ...

(32) Calcula la suma dels múltiples de 3 menors que 1000 i majors que 100.

(33) Calcula la suma dels primers 8 termes de la progressió: 1, 2, 4, 8, 16, ...

(34) Calcula el producte dels primers 8 termes de la progressió: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

(35) Calcula la suma dels infinits termes de la progressió: 16, 8, 4, 2, 1, ...

(36) Calcula el producte dels primers 10 termes de la progressió 16, 8, 4, 2, 1, ...

(37) El nombre inicial de mosques d'una població és de 50 i cada tres dies es duplica el nombre de les mosques. Quantes mosques hi haurà al cap de 30 dies?

(38) Escriu la fracció generatriu de $1'\hat{2}$, aplicant la suma d'una progressió.

(39) En una progressió geomètrica el sisè terme val 64 i el quart és 16. Troba el terme general.

(40) Els angles d'un triangle estan en progressió aritmètica. Si el més petit és de 40° , quina és la mesura dels altres dos ?(41) Escriu el terme 95 de la successió: $\frac{10}{3}, \frac{11}{4}, \frac{12}{5}, \frac{13}{6}, \dots$

(42) Calcula la suma de tots els múltiples de 3 de tres xifres.

(43) La mare d'en Joan decideix guardar un euro al dia a partir de que en Joan fa un any. Anirà duplicant la quantitat en tots els aniversaris del seu fill. Quants diners haurà estalviat el dia que faci 16 anys?

(44) Calcula el límit de cadascuna de les successions següents:

(a) $n^4 - 3n + 3$	(h) $\left(\frac{1}{4}\right)^n$	(o) $\frac{n+2}{\sqrt{n-1}}$
(b) $\frac{1+\sqrt{n+1}}{n}$	(i) 3^n	(p) $\sqrt{2n^2-2} - \sqrt{2n^2-n}$
(c) $90 + \frac{1}{n}$	(j) $(-1)^n \frac{n^2}{n^3-1}$	(q) $\frac{(2n-1)(3n+1)}{(n+2)(6n-1)}$
(d) $\frac{4n}{-2n+3}$	(k) $\left(\frac{3n-1}{n+2}\right)^{\frac{n+1}{n}}$	(r) $\left(\frac{2n-1}{6n-1}\right)^{\frac{3n}{n+2}}$
(e) $\frac{700}{n^{23}-4}$	(l) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}}$	(s) $\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}}$
(f) $\frac{-n+1}{n^2+n+1}$	(m) $\frac{2^n}{3^n}$	(t) $\frac{2n^2-3}{\sqrt[3]{n^4+2n^2}}$
(g) $\frac{n^4-2n}{2n^3-n^2+1}$	(n) $\left(\frac{n^2}{n+5} - \frac{n}{5}\right)$	

(45) Calcula el límite de cada una de las sucesiones siguientes:

(a) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$	(c) $\left(2 - \frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$	(e) $\left(1 + \frac{3n+1}{2n}\right)^{3n^2}$
(b) $\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^n$	(d) $\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{9n}$	(f) $\left(\frac{n^2-1}{n^2+n}\right)^{3n^4}$

9.13 Solucions

(1) $a_1 = 4$, $a_2 = 4 + 2 = 6$, $a_3 = 6 + 3 = 9$, $a_4 = 9 + 4 = 13$

(2) “Cada terme és igual a l’anterior més 5”

(3) $a_1 = 1$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 3^2 = 9$, $a_4 = 4^2 = 16$, $a_5 = 5^2 = 25$

(4) $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$

(5) $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 3 + 7 = 10$, $a_4 = 7 + 10 = 17$, $a_5 = 10 + 17 = 27$

(6) (a) $a_n = 1 + n$, (b) $a_n = 2^n$

(7) (a) $d = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ $d = 13 - 10 = 10 - 7 = 7 - 4 = 4 - 1 = 3$

(b) $d = 0 - 2 = 2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = -2$

(c) $d = 18 - 14 = 14 - 10 = 10 - 6 = 6 - 2 = 4$

(8) (a) $a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 2$

(b) $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 7$

(c) $a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$

(9) $a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2 + 9 \cdot 2 = 20$, $S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2+20}{2} \cdot 10 = 11 \cdot 10 = 110$

(10) $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$, $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3+79}{2} \cdot 20 = 41 \cdot 20 = 820$

(11) $a_1 = 4$ $d = 5 \rightarrow 4, 9, 14, 19, \dots$

Ara hem de calcular el nombre de termes:

$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 499 = 4 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 1 \rightarrow 5n = 500 \rightarrow n = 100$

$$S_{100} = \frac{4+499}{2} \cdot 100 = \frac{503}{2} \cdot 100 = 25150$$

(12) (a) $r = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, $r = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

(b) $r = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

- (13) (a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$
 (b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}$
- (14) $r = \frac{a_2}{a_1} = 21 = 2 \longrightarrow S = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$
- (15) $a_1 = 1; a_n = 243; r = 3, \longrightarrow S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{243 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{728}{2} = 364$
- (16) $a_1 = 8; r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \longrightarrow S = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$
- (17) $a_1 = \frac{1}{8}; r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2; a_8 = \frac{1}{8} 2^7 = 2^4 = 16 \quad P = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \cdot 16\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$
- (18) (a) 0 (b) $+\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$ (e) 0 (f) 1 (g) $\frac{1}{2}$ (h) 0 (i) No en té (j) 1
- (19) (a) 19 i 23 (b) 48 i 96 (c) 2 i 1 (d) 37 i 50
- (20) (a) 6, 7, 8, 9, ... (b) 1, 2, 4, 8, ... (c) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[5]{6}, \dots$ (d) 5, 10, 15, 20, ...
- (21) (a) $a_n = n$ (b) $a_n = n^2$ (c) $a_n = \frac{1}{n}$ (d) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$
- (22) (a) $a_{100} = 302$ (b) $a_n = \frac{201}{99}$ (c) $a_n = \frac{1}{101}$
- (23) (a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (b) $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ (c) $a_{n+1} = a_n + 4$ (d) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$
- (24) (a) $a_n = 3n + 1$ (b) $a_n = 2n - 1$ (c) $a_n = 4n + 3$ (d) $a_n = n + 2$
- (25) (a) $a_n = 2^{n+1}$ (b) $a_n = 3^{n-1}$ (c) $a_n = 2^{5-n}$ (d) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- (26) (a) 8 (b) 5 (31) 15100 (36) $\frac{1}{32}$ (40) 60 i 80
- (27) (a) 5 (b) 2 (32) 165150 (37) 16000 (41) $\frac{104}{97}$
- (28) (a) -99 (b) -77 (33) 511 (38) $\frac{11}{9}$ (42) 165150
- (29) (a) 5 (b) 5 (34) 16 (39) $a_n = 2^n$ (43) 8191
- (30) 81 (35) 32

Capítol 10

Límits i Continuitat de Funcions

10.1 Límit d'una funció en un punt

El límit d'una funció és un concepte relacionat amb la variació dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat d' x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor. Aquest fet s'indica així:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

i es llegeix com el límit d'una funció f en un valor a és igual a b , la funció f té límit b quan la x tendeix a a .

La definició més rigorosa del concepte de límit d'una funció seria: Donat el nombre real $\epsilon > 0$, que pot ser tant petit com vulguem, existeix un altre nombre real $\delta > 0$ de manera que si $|x - a| < \delta$, llavors es compleix sempre que $|f(x) - b| < \epsilon$.

Exemple 1

Segui la següent funció $f(x) = x^3 - 2x + 3$, calculeu els límits quan x tendeix a -2 , 0 i a 3 .

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x^3 - 2x + 3 = (-2)^3 - 2 \cdot (-2) + 3 = -8 + 4 + 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 2x + 3 = 0^3 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^3 - 2x + 3 = 3^3 - 2 \cdot 3 + 3 = 27 - 6 + 3 = 24$$

10.1.1 Límits d'operacions amb funcions

Suposem que existeixen els límits de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en un punt $x = a$, per tant, existeixen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad i \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$$

llavors podem dir que:

- El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

- El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$$

- El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$$

- El límit de la potència de dues funcions en un punt és igual a la potència de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, sempre que ambdues funcions no siguin 0 al mateix temps:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = b^c$$

Exemple 2

Calculeu els límits de les següents funcions quan x tendeix a 0 i a 3:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \quad g(x) = (x - 3) \cdot (x + 2) \quad h(x) = e^{x^2 + 1} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0^2 - 3}{0^2 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3^2 - 3}{3^2 + 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = (0 - 3)(0 + 2) = (-3)(2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = (3 - 3)(3 + 2) = 0 \cdot 5 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = e^{0^2 + 1} - 2 \cdot 0 = e^1 - 0 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = e^{3^2 + 1} - 2 \cdot 3 = e^{10} - 6$$

10.2 Límits d'una funció quan x tendeix a $+\infty$ 0 $-\infty$

Direm que el límit d'una funció $f(x)$ és un nombre a quan si x tendeix a $+\infty$ i, donat un interval qualsevol de centre a , hi ha un nombre k de manera que si $x > k$, llavors $f(x)$ es troba en l'interval de centre a . De forma semblant es definiria el cas de x tendint a $-\infty$.

Exemple 3

Si per exemple, volem saber el valor del límit de la funció $f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x + x^2}$ quan x tendeix a ∞ , anem donant valors a la funció prou grans, obtenim:

$f(10) = 1,790909$	$f(100) = 1,979901$	$f(1\,000) = 1,997990$	$f(10\,000) = 1,999800$
$f(100\,000) = 1,999980$		$f(1\,000\,000) = 1,999998$	...

Per tant, podem dir que el límit quan x tendeix a ∞ és:

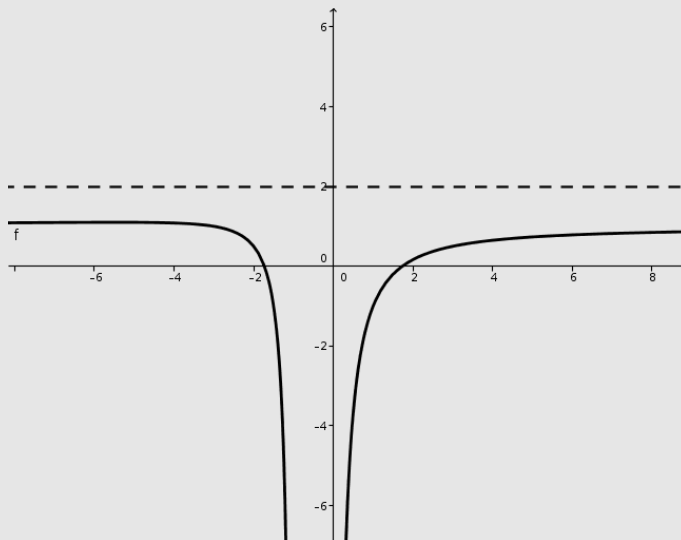
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x + x^2} = 2$$

De fet, el mètode per resoldre aquest límit és el mateix que quan resollem el límit de successions. Al ser una fracció algebraica i com que quan fem el límit quan x tendeix a ∞ obtenim una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, llavors hem de dividir el numerador i el denominador per l'exponent més gran de la x , en aquest cas dividirem per x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{2 + \frac{3}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + 1} = \frac{2 + 0}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

Exemple 4

Si fem la gràfica de la funció, podem observar que a mesura que augmentem el valor de la x , la funció tendeix a $y = 2$:



10.3 Límits laterals d'una funció

Quan calculem el límit d'una funció quan x tendeix a a per valors més petits de a direm que x tendeix a a per l'esquerra i la notació és la següent: $x \mapsto a^-$. Anomenarem al límit, límit lateral per l'esquerra:

$$\lim_{x \mapsto a^-} f(x)$$

En canvi, si calculem el límit d'una funció quan x tendeix a a per valors més grans de a , direm que x tendeix a a per la dreta i ho escriurem així: $x \mapsto a^+$. Anomenarem al límit, límit lateral per la dreta:

$$\lim_{x \mapsto a^+} f(x)$$

Perquè existeixi el límit d'una funció en un punt $x = a$, cal que

$$\lim_{x \mapsto a^-} f(x) = \lim_{x \mapsto a^+} f(x) = b$$

I llavors direm que el límit de la funció $f(x)$ en el punt $x = a$ és

$$\lim_{x \mapsto a} f(x) = b$$

Exemple 5

Si volem calcular els límits laterals de la funció $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$ en el punt $x = 1$ ens trobarem amb el següent:

Considerarem que 1^- són nombres més petits que 1, per tant, són nombres de l'estil 0,9 0,999 o 0,9999. Per tant, podem dir que $1^- - 1 < 0$. De la mateixa manera amb 1^+ , que considerarem el 1^+ com nombres de l'estil 1,001 1,000001 i, per tant, $1^+ - 1 > 0$.

$$\lim_{x \mapsto 1^-} \frac{2x-5}{x-1} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1^- - 1} = \frac{-3}{0^-} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

En canvi, si fem el límit per la dreta obtenim un resultat diferent:

$$\lim_{x \mapsto 1^+} \frac{2x-5}{x-1} = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1^+ - 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Per tant, arribem a la conclusió que el $\lim_{x \mapsto 1} f(x)$ no existeix.

Exemple 6

Calculem els límits laterals de la funció $f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + 2x - 3}$ en el punt $x = 1$ ens trobarem amb el següent:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x}{x+3} = \frac{3 \cdot 1^-}{1^- + 3} = \frac{3}{4}$$

Al haver simplificat la funció per $x - 1$, observem que tant el límit de l'esquerra com el límit de la dreta, coincideixen. Per tant, podem assegurar l'existència del límit de la funció en el punt $x = 1$ i el seu valor és

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{4}$$

Exemple 7

Considerem la següent funció definida a trossos i en calculem els límits en els punts $x = -2$, $x = 0$ i $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 & \text{Si } x < -2 \\ 2x^2 + 1 & \text{Si } -2 < x < 2 \\ 3x + 3 & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$$

Cas $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 + 1 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 \cdot 2 + 3 = 9$$

Per tant, com que coincideixen els dos límits laterals, podem assegurar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$.

Cas $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

En aquest cas coincideixen els dos límits laterals perquè utilitzem la mateixa funció i no tenim cap valor dividint per zero, llavors podem assegurar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Cas $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -4x + 3 = -4 \cdot (-2) + 3 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2x^2 + 1 = 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 9$$

Per tant, com que els dos límits laterals no coincideixen, no existeix el $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

10.4 Continuïtat d'una funció en un punt

Es diu que una funció $y = f(x)$ és contínua en un punt a si es compleixen aquestes tres condicions:

- (1) La imatge de la funció en el punt a està definida, $\exists f(a)$
- (2) Els límits laterals de la funció en el punt a coincideixen.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

I en aquest cas es diu que existeix el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

- (3) El límit de la funció en el punt a i el valor de la funció en aquest punt coincideixen:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Només que no es compleixi una de les tres condicions, direm que la funció $f(x)$ no és contínua en el punt a o que la funció $f(x)$ és discontinua en el punt a .

Exemple 8

Estudia la continuïtat de les següents funcions:

(1) $f(x) = x^{15} - 3x^4 + 2x$

(2) $g(x) = (e^x - x^2) \cdot (x^3 - x + 1)$

(3) $h(x) = \frac{x^5 - x^3}{(x+1)(x-2)}$

- (1) La funció $f(x)$ és contínua a tot arreu, és a dir, a $\mathbb{R}$. És una funció polinòmica, i com que és una combinació lineal de funcions contínues amb sumes i multiplicacions de funcions contínues llavors és una funció contínua.
- (2) La $g(x)$ és el mateix que l'anterior apartat, tenint en compte que la funció exponencial, e^x , també és contínua a tot arreu.
- (3) En canvi, la funció $h(x)$ és una fracció algebraica, per tant, pot haver-hi punts en els quals estem dividint per zero. En aquest cas, per $x = -1$ i $x = 2$. En aquests punts direm que la funció no és contínua perquè ni tan sols estant en el domini.

Exemple 9

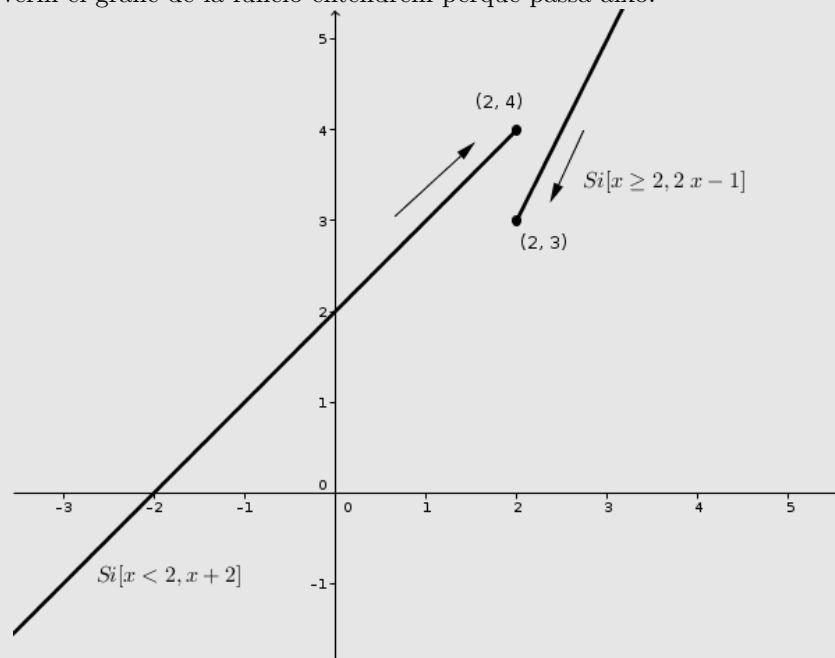
Estudia la continuïtat de la funció definida a trossos següent:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{Si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{Si } x \geq 2 \end{cases}$$

Com que els dos trossos són polinomis podem assegurar que la funció és contínua a tot arreu menys en el punt on s'enganxen les dues funcions, en $x = 2$. Per tant, haurem d'estudiar el cas concret d' $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 2 + 2 = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Com que els límits laterals no coincideixen, llavors assegurem que no existeix el límit quan x tendeix a 2. Si observem el gràfic de la funció entindrem perquè passa això:



10.5 Tipus de Discontinuitats

Un cop hem vist com estudiar si una funció és contínua o no, anem ara a veure què passa quan la funció no és contínua.

Direm que la funció és discontinua en un punt $x = a$, quan no és contínua en aquest punt. Però a més, podem distingir els diferents tipus de discontinuïtat que hi ha:

- (1) **Evitable:** La funció té una discontinuïtat evitable en el punt $x = a$ si existeix el límit de la funció en el punt $x = a$ però no coincideixen amb el valor de la funció en aquest punt, o bé el valor de la funció no existeix en aquest punt. És a dir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

Exemple 10

Considerem la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x + 1} & \text{Si } x \neq -1 \\ 3 & \text{Si } x = -1 \end{cases}$$

Si observem la fracció algebraica, és contínua a tot arreu menys en el punt $x = -1$, a $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Estudiem el cas $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - x}{x + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow IND$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} x(x-1) = -1 \cdot (-1-1) = 2$$

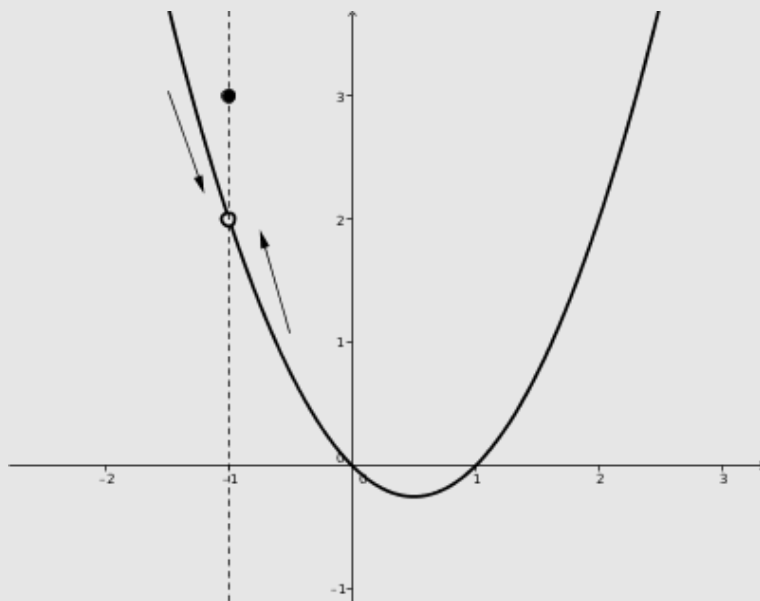
Si fem el límit per la dreta ens passarà el mateix i per tant els dos límits laterals coincideixen.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

Però el valor que tenim definit de la funció en aquest punt és $f(-1) = 3$.

Per tant, $f(x)$ és discontinua en $x = -1$ perquè $f(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

I en aquest cas es veu perquè li diem **discontinuitat evitable**. Perquè si canviem el valor definit de la funció en $x = -1$ per $f(-1) = 2$ aconseguim obtenir una funció contínua a tot arreu. Si representem la funció gràficament observem que tenim tota la gràfica menys un punt, que marquem amb un punt buit de dins. I el punt definit de la funció és el punt ple en $x = -1$.



- (2) **De salt:** Discontinuitat en la qual els límits laterals de la funció en el punt $x = a$ no coincideixen i ambdós límits són nombres reals.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Exemple 11

Considerem la funció

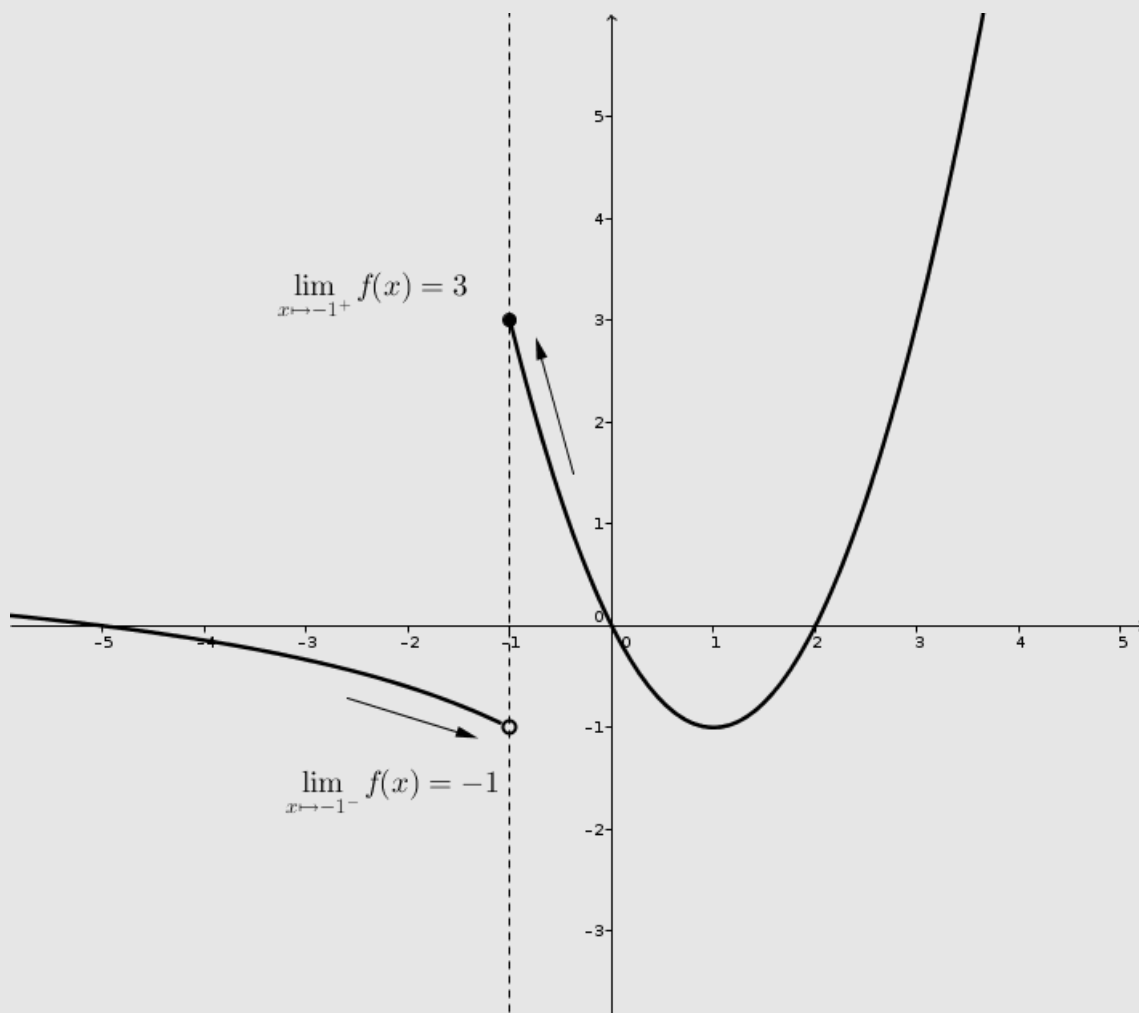
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{x-3} & \text{Si } x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{Si } x \geq -1 \end{cases}$$

Per a valors $x < -1$, si observem la fracció algebraica, és contínua a tot arreu menys en el punt $x = 3$, però com que no està en el domini de la funció podem assegurar que és contínua fins a -1 . I a partir de $x \geq -1$ també és contínua perquè és un polinomi. Per tant, només ens queda estudiar el cas $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+5}{x-3} = \frac{-1+5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2x = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$$

Per tant, els dos límits laterals són finits però no coincideixen. Per tant, estem davant d'una **discontinuitat de salt** en $x = -1$



- (3) **Asimptòtiques:** Algun dels límits laterals de la funció en el punt $x = a$ pren valors infinits, coincidint o no els seus valors. Altrament dita, de salt infinit.

Exemple 12

Si estudiem el cas de la funció

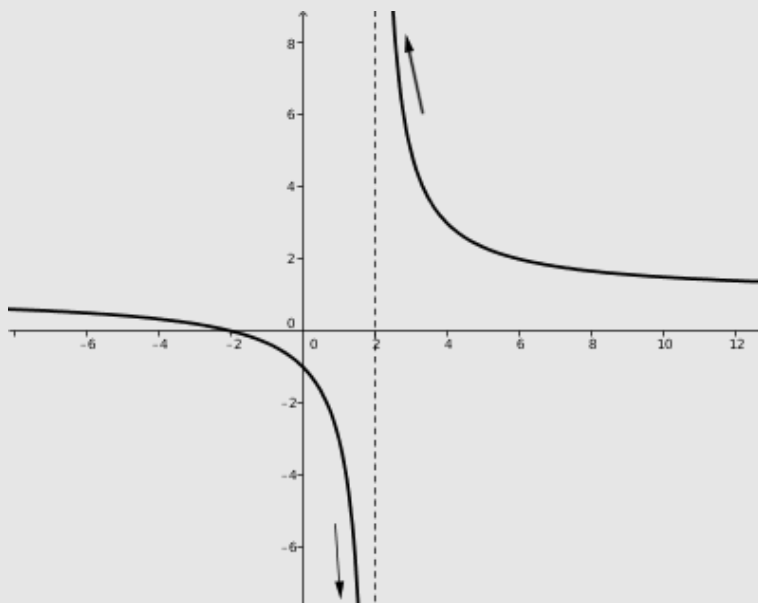
$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

observem que és contínua a tot arreu menys en el punt que fa el denominador zero, el punt $x = 2$. Si fem els límits laterals en aquest punt obtenim valors infinits, i a més, diferents:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+2}{2^- - 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+2}{2^+ - 2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Per tant estem davant d'una **discontinuitat asimptòtica** en $x = 2$.



Exemple 13

Considereu la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{Si } x < 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determineu el valor de b perquè la funció f sigui contínua en el punt $x = 0$. Justifiqueu si f pot ser discontinua en algun altre punt.

Calculeu els límits laterals en el punt $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 2 \cdot 0 + b = b \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 + 1 = 2$$

Si la funció ha de ser contínua en $x = 0$, cal que sigui $b = 2$. Llavors obtindrem que els límits laterals coincideixen, per tant, existeix el límit en $x = 0$ i a més, coincideix amb el valor de la funció, $f(0) = 2$.

La funció f no pot ser discontinua en cap altre punt, perquè tant el polinomi de segon grau com l'exponencial són contínues a tot arreu.

Exemple 14

Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{Si } x < -2 \\ x^2 - 5 & \text{Si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{Si } 1 \leq x \end{cases}$$

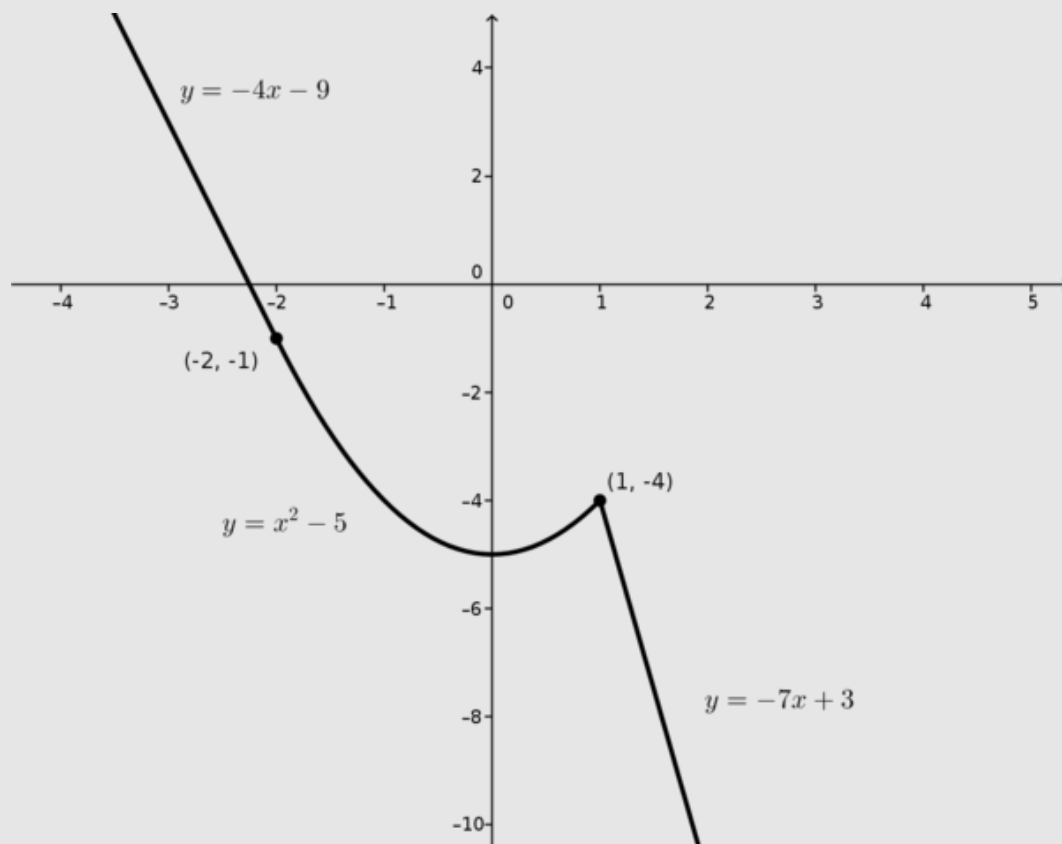
- Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x .
Perquè sigui contínua els límits per l'esquerra i per la dreta en els punts $x = -2$ i $x = 1$ han de ser iguals. Per tant:

$$\left. \begin{array}{l} 8 + a = -1 \\ -4 = b + 3 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} a = -9 \\ b = -7 \end{array}$$

I la funció serà:

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 9 & \text{Si } x < -2 \\ x^2 - 5 & \text{Si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{Si } 1 \leq x \end{cases}$$

- Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.
Per a $x \leq -2$ és una recta de pendent -4 i per a $x = -2$ té el valor $f(x) = -1$.
Per a $-2 \leq x \leq 1$ és una paràbola de vèrtex a $x = 0$ i per $x \geq 1$ és una recta de pendent -7 que per $x = 1$ té el valor $f(x) = -4$.
A més, per construcció és contínua.



Exemple 15

Considereu la funció:

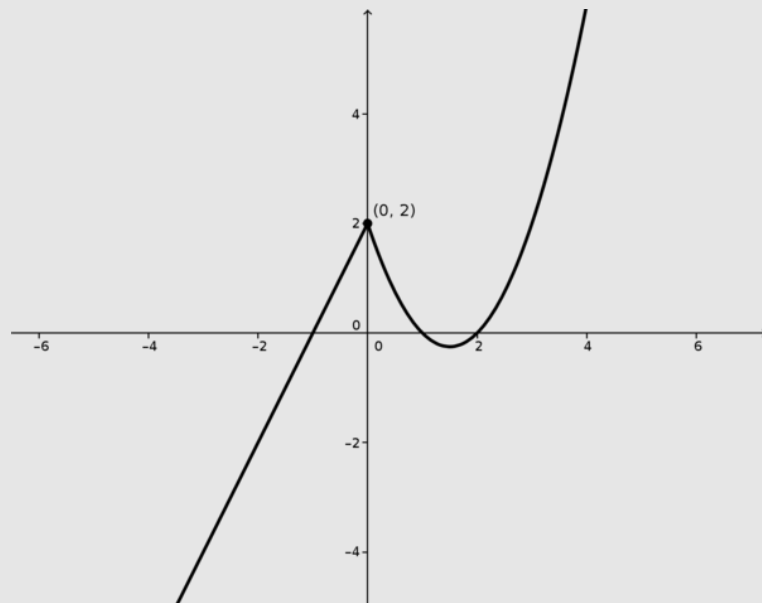
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{Si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Dibuixeu la gràfica.

(b) Estudieu-ne la continuïtat.

(c) Determineu els extrems relatius.

- (a) La gràfica de la funció és la recta de pendent 2 i ordenada a l'origen 2 per $x \leq 0$, i per $x > 0$ la paràbola $y = x^2$ traslladada de tal manera que talla l'eix x per $x = 1$ i $x = 2$, que són les arrels i a l'eix en el punt $(0, 2)$. Així tenim:



(b) Continuïtat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + 2 = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 3x + 2 = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

Per tant, podem dir que existeix el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i és igual a 2 perquè coincideixen els límits laterals. I com que $f(0) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ podem dir que la funció és contínua a $x = 0$. A la resta de punts també és contínua perquè són polinomis.

(c) Tenim un màxim relatiu en el punt $(0, 2)$. I un mínim relatiu a $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$.

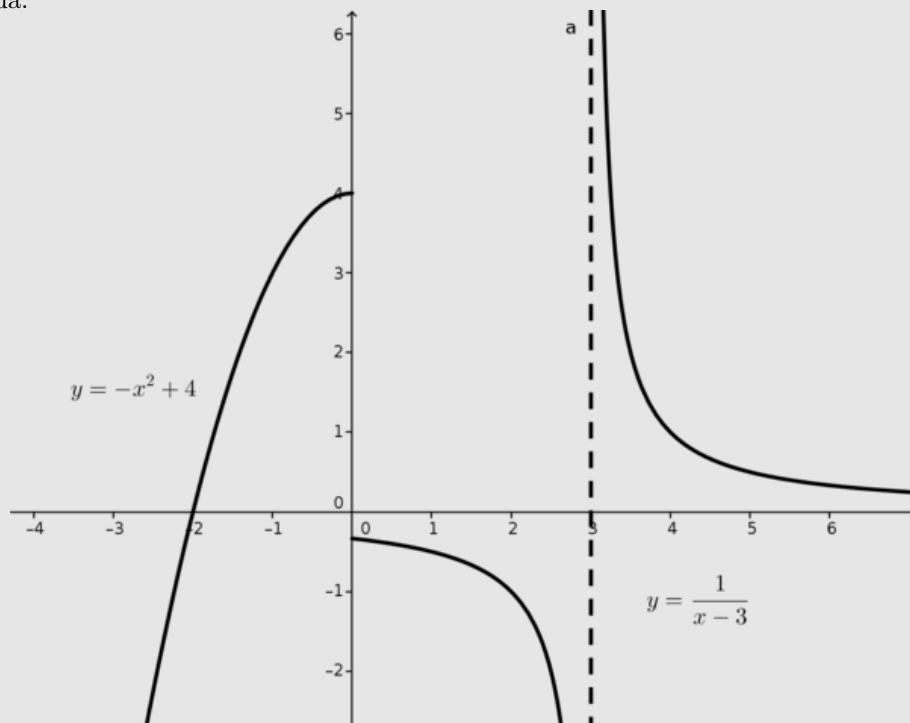
PAAU Juny 2006

Exemple 16

Considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{Si } x < 0 \\ \frac{1}{x-3} & \text{Si } x \geq 0 \end{cases}$$

Feu-ne una representació gràfica aproximada. Justifiqueu per a quins valors de x la funció és discontinua.



Per a valors més petits que 0 la funció és contínua perquè és un polinomi.

Per a valors més grans que 0, la funció és discontinua per a $x = 3$ perquè és una fracció algebraica que el denominador es fa zero per a $x = 3$.

Ara ens cal mirar a $x = 0$, per això fem els límits laterals.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 + 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0-3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Com que els límits laterals no coincideixen podem dir que la funció no és contínua en $x = 0$.

Per tant, la funció $f(x)$ és contínua a $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

PAAU Juny 2006

10.6 Vídeos sobre continuïtat

- **Límits Laterals**

<http://www.youtube.com/watch?v=Lg9fOAapkOw>

- **Definició de Continuïtat**

<http://www.youtube.com/watch?v=Ls0vuya6JwQ>

- **Exemple de Funció definida a trossos**

<http://www.youtube.com/watch?v=3AP6OodY1W8>

- **Continuïtat d'una Funció definida a trossos amb paràmetres**

<http://www.youtube.com/watch?v=N4BG7SW6gZw>

10.7 Exercicis

Calcula els següents límits:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2$ (14) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2}$ (26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{x^3 - x^2 + 4x}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ (15) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$ (27) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 9}{(x - 3)^2}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ (16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (28) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{8x^3 - 2x^2 + 6}$ (17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1}$ (29) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ (18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 - 2}$ (30) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2x - 4}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3$ (19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 + 3x^3 - x + 1$ (31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4x}$ (20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2 - 4x^2}{1 - 9x^2}}$ (32) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 9x - 30}{16 + 2x^3}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 3x}$ (21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 3x^2}{5x + 2}$ (33) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{27 - x^3}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 - 2x^2 + 1$ (22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - 3x + 2x^2 - x^4$ (34) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 1}{6x^2} - \frac{2x + 3}{3x^2} \right)$
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 4x}{3x - 5}$ (23) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x + 7}$ (35) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x + 1) \right]$ (24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x}{x^2 + 4}$ (36) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 3}{x^2 - 1} : \frac{3x + 2}{x - 1} \right)$
- (12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$ (25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 2x + 7}$ (37) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x^2 - 2x}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-19}{(x - 2)^3}$

(38) Calcula els límits laterals de la següent funció en els punts $x = 0$ i $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - x} & \text{Si } x < 0 \\ \frac{x - 3}{x - 1} & \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x + 1}{x + 2} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$$

(39) Calcula els límits quan x tendeix a -3^+ , -3^- , -3 , -2^- , -2^+ , -2 , 1^- , 1^+ , 1 de la següent funció:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$$

(40) Calcula els límits quan x tendeix a -2^- , -2^+ , -2 , 1^- , 1^+ , 1 de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} & \text{Si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{2x - 2} & \text{Si } x > 1 \end{cases}$$

(41) Estudia la continuïtat de les següents funcions i digues el tipus de discontinuïtat si n'hi ha:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(b) $f(x) = \frac{x+3}{x}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{Si } x \neq 0 \\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x < -1 \\ \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12} & \text{Si } x \geq -1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} & \text{Si } x \leq 4 \\ \sqrt{x} - \frac{11}{7} & \text{Si } x > 4 \end{cases}$

(f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{Si } x \neq 2 \\ 5 & \text{Si } x = 2 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{Si } x < 4 \\ \sqrt{x} & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{Si } x < -3 \\ x^2 + 3x & \text{Si } x \geq -3 \end{cases}$

(42) Considera la següent funció

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$$

Digues com pots modificar-la el mínim possible per aconseguir una funció contínua a tot $\mathbb{R}$.

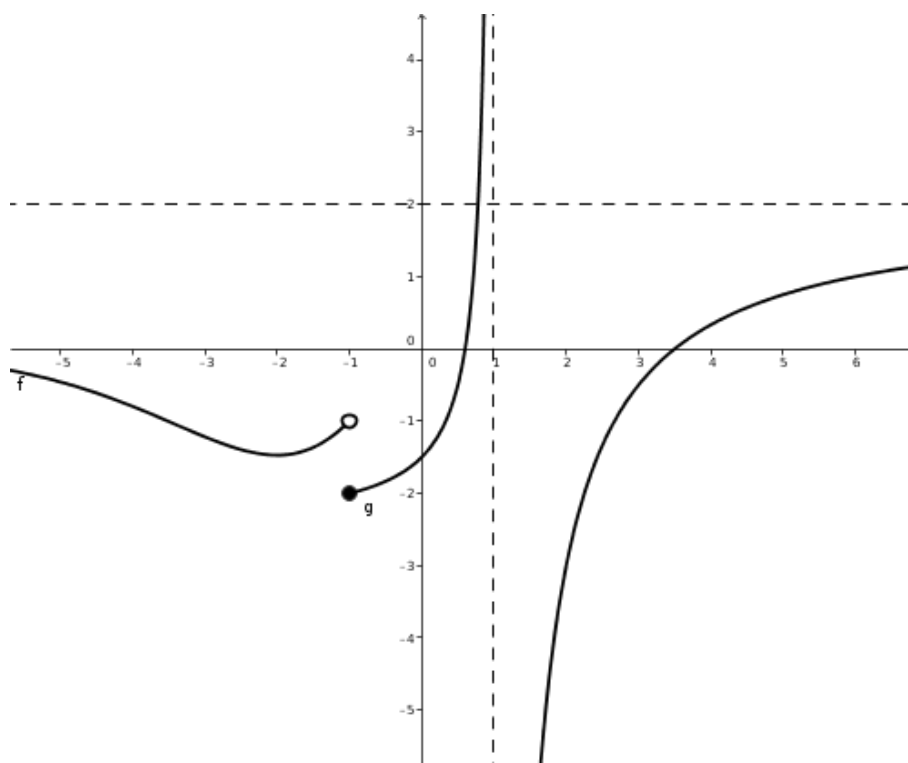
(43) Donada la següent funció

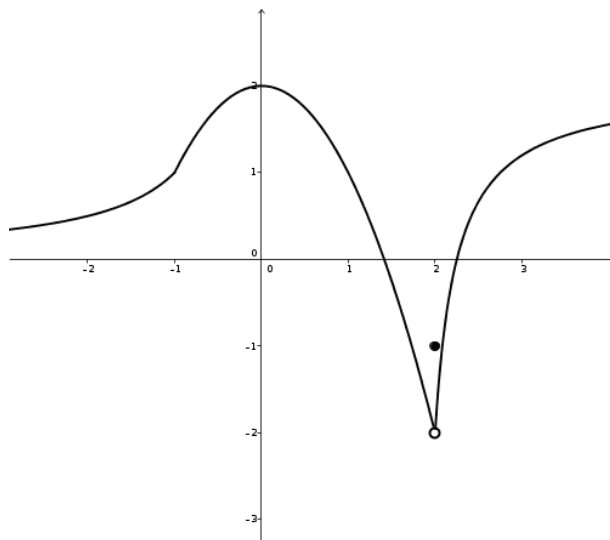
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

troba el límit de la funció quan x tendeix a: 0, 1, -2, $-\infty$ i $+\infty$. Estudia la continuïtat d'aquesta funció especificant el tipus de discontinuïtat, si n'hi ha.(44) Troba el valor de k perquè la següent funció sigui contínua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k & \text{Si } x \leq 0 \\ 2x^2 - kx + 6 & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

(45) A partir de la gràfica de les dues funcions següents estudia la continuïtat, digues els límits laterals en els punts de discontinuïtat.





10.8 Solucions

- (1) 7 (12) $\frac{1}{2}$ (21) $-\infty$ (32) $\frac{-7}{8}$
 (2) 0 (13) Límits laterals diferents (22) $-\infty$ (33) $\frac{8}{3}$
 (3) $\frac{-3}{2}$ (14) e (23) $-\infty$ (34) ∞
 (4) $\frac{1}{4}$ (15) $\frac{a-1}{3a^2}$ quan $a = 0$ és $-\infty$. (24) 0 (35) ∞
 (5) $+\infty$ (16) 4 (25) ∞ (36) $\frac{1}{2}$
 (6) $+\infty$ (17) $\frac{-5}{3}$ (26) $\frac{-3}{4}$ (37) 6
 (7) 0 (18) 0 (27) ∞ (38) 2 i 3, $+\infty$ i 1
 (8) $\frac{3}{2}$ (19) $-\infty$ (28) $\frac{-2}{3}$ (39) $+\infty, -\infty, \infty, -3, -3, -3, 0, 0, 0$
 (9) 10 (20) $\frac{2}{3}$ (29) -2 (40) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1, \nexists$
 (10) 0 (31) 0
 (11) $\frac{-1}{2}$
- (41) (a) Contínua a $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
 (b) Discontinuitat asimptòtica en $x = 0$. Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 (c) Discontinuitat asimptòtica en $x = 0$. Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 (d) Discontinuitat de salt en $x = -1$ i una asímptota vertical en $x = 4$.
 (e) Asímptota vertical en $x = -3$ i contínua en $x = 4$.
 (f) Discontinuitat asimptòtica en $x = 1$. Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (g) Discontinuitat evitable en $x = 2$. Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
 (h) Discontinuitat de salt en $x = 4$. Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
 (i) Contínua a $\mathbb{R}$
- (42) Definint $f(0) = \frac{1}{3}$ (43) $\frac{-3}{4}, \frac{-2}{9}, -\infty, 0, 0$ (44) $k = 6$
- (45) Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. $x = -1$ és una discontinuitat de salt. I $x = 1$ discontinuitat asimptòtica.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Contínua a $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. $x = 2$ és una discontinuïtat evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$$