REGLETAS NUMÉRICAS
M. ANTÒNIA CANALS

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
EMILI GRAHIT 77. 17071 - GIRONA
antonia.canals@udg.es. Fax: 972418301

PRESENTACIÓN

Las regletas numéricas son unas regletas de madera de colores que representan los 10 primeros números naturales, sus cuadrados y sus cubos. Sus magnitudes son una expresión realista de las cantidades, con la característica que no están marcadas las unidades que las forman.

- Los números se representan por regletas de $1cm^2$ de sección, su longitud equivale en centímetros al número que representa y son de los colores siguientes:
  el 1 (un dado de 1 cm de arista) es de color de madera natural;
  a los 2, 4 y 8 (familia del 2) les corresponde el color rosa, rojo y granate;
  a los números 3 y 9, les corresponde el color azul claro y azul oscuro;
  el 6 (familia del 2 y del 3) es de color lila (mezcla del rosa y el azul claro);
  el 5 es verde; el 7 es amarillo y el 10 es de color marrón, mezcla de rosa y verde (puesto que 10 es 2 X 5).
- Los cuadrados son placas cuadradas, de 1 cm de espesor, cada una de color y longitud del lado del número correspondiente.
- Los cubos son cubos que tienen también su arista en cm. y su color correspondiente a los números del 1 al 10.

Se presentan en cajas de madera, con la distribución y el número de unidades siguientes:

Caja 1 De 6 a 14 años

Regletas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de unidades	60	60	30	30	30	30	10	10	10	40

Caja 2 De 8 a 14 años

Cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de unidades	60	25	15	10	10	6	2	2	2	12

Caja 3 De 10 a 14 años

Cubos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de unidades	60	30	10	8	8	2	1	1	1	4

Con estas cajas, se pueden confeccionar diferentes paquetes para trabajar en función de los niveles educativos y poderlo hacer en dos o tres aulas simultáneamente. Recomendamos:

Ciclo inicial sólo..Caja 1

Ciclo medio .... Caja 1 y 2

Ciclo superior y 1er. Ciclo de E.S.O...Caja 1, 2 y 3

Paquete mínimo necesario para una escuela de Primaria de una línea:

Dos ejemplares de la caja 1, uno de la caja 2 y uno de la caja 3.

OBJETIVOS

Las regletas numéricas, además de una gran eficacia para la comprensión de conceptos, potencian las habilidades características del saber matemático. De este modo favorecen la adquisición progresiva de la competencia numérica.

Sus objetivos principales son los siguientes:

- Ayudar a los chicos y chicas a familiarizarse con los números naturales, a conocerlos en profundidad y a amarlos.
- Experimentar y descubrir relaciones entre los números, los cuadrados y los cubos.
- Visualizar las operaciones y favorecer su práctica.
- Hacer estimación de resultados y discutir diferentes soluciones.
- Fundamentar el razonamiento a partir de la manipulación
- Favorecer la imaginación de los números y su expresión verbal
- Adquirir agilidad en el cálculo mental.
- Facilitar el paso al lenguaje matemático escrito, aprendiendo el significado real de los signos
- Investigar cuestiones numéricas, que son como los “misterios “ de los números.
- Descubrir propiedades de las operaciones y estrategias numéricas.
- Trabajar la superficie y el volumen.

HABILIDADES

Tal vez el aspecto más característico de las regletas numéricas es precisamente hacer posible la adquisición de unas habilidades o contenidos procedimentales, que, tal y como dice nuestro diseño curricular, son un punto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas de los 6 a los 14 años. Entre estas habilidades podemos destacar las siguientes:

- **Observación de las relaciones lógicas y numéricas** a partir de les experiencias concretas, puesto que en las edades de primaria “son las acciones sobre los objetos las que desencadenan el pensamiento” (diseño c. b. de Cataluña)

- **Expresión verbal** de las acciones realizadas y de las relaciones encontradas, la cual ayuda a “concretar el pensamiento”.

- **Planteamiento de interrogantes** y utilización de métodos heurísticos para resolverlos, provocando una respuesta eficaz de los alumnos.

- **Análisis de la información recibida** para poder actuar en consecuencia y para dar nuevos pasos.

- **Estimación**, o sea anticipación de resultados, la cual practicada a menudo, cuando los alumnos ya se han familiarizado con una actividad, favorece la interiorización.

- **Investigación y descubrimiento** de propiedades numéricas. Ésta es probablemente la habilidad clave del saber matemático, que de forma progresiva tienen que cultivar los alumnos desde las edades del pensamiento concreto.

- **Investigación de estrategias,** aplicables directamente al **cálculo mental**

- **Paso de la acción al cálculo escrito**, con la correcta aplicación de un lenguaje matemático del que se conoce el significado real.

Todas estas habilidades pueden aparecer en cada una de les actividades y se deben trabajar a lo largo de toda la etapa de primaria. Con ello, no queremos decir que sea conveniente insistir en todas cada vez que se utilicen las regletas, sino que las podemos alternar, en función de las posibilidades de los alumnos, y sobre todo aprovechando cada situación y siguiendo la iniciativa del maestro.

CIEN ACTIVIDADES CON LAS REGLETAS NUMÉRICAS

Con el fin de conseguir estos objetivos, los niños y las niñas realizarán un amplio abanico de actividades, de las cuales nombraremos las más conocidas, convencidos que los maestros también descubrirán e inventarán nuevas actividades para trabajar con los alumnos.

Es aconsejable trabajarlas en forma de **taller de matemáticas**, organizadas en forma de “rincones”, en pequeños grupos de trabajo, o de otras formas parecidas, sin descartar la posibilidad que los maestros las utilicen alguna vez para una presentación o explicación global con toda de la clase.

Al lado de cada actividad se indican los contenidos conceptuales, u otros conocimientos generales, que le son específicos.

PARA TRABAJAR CON LA CAJA 1. Ciclo inicial de primaria

Primeros números. Suma y resta.

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
1. Comparar dos o más regletas estableciendo relaciones de mayor, menor o igual entre las cantidades. Ordenar las regletas del 1 al 10.	Noción de cantidad o primer concepto de número natural. Relación de orden entre los números. La serie numérica.
2. Sumar números situando las regletas en hileras, una a continuación de la otra, seleccionando aquella que corresponda al resultado.	Noción de suma, como acción de añadir una cantidad a otra y como resultado de reunir dos o más cantidades.
3. Descomponer números libremente o bien siguiendo consignas concretas (número de regletas a reunir, sí pueden repetirse o no....)	Noción de equivalencia. Ampliación del conocimiento de los números que se descomponen. Consolidación de la suma.
4. Restar números seleccionando las regletas necesarias para llegar a igualar otra más larga.	Noción de resta, como acción de quitar una cantidad de otra y de encontrar lo que le falta a un número para llegar a otro.
5. Prever el resultado de sumas y restas	Preparación para el cálculo mental.

a simple vista. Comprobarlo con el material.	
6. Construir series numéricas sumando o restando un número fijo.	Consolidación de sumas y restas y de la serie numérica.
7. Configurar con regletas construcciones correspondientes a relaciones numéricas expresadas verbalmente y viceversa.	Concreción de la relación entre la acción y los significados matemáticos aprendidos. Fijación de los significados.
8. Separar los números conocidos (regletas) en dos grupos: los que pueden formarse con la suma de dos de iguales, y los que no.	Descubrimiento y conocimiento de los números pares y nones
9. Realizar juegos de descubrimiento de un número oculto y otros juegos de cálculos relativos a sumas y restas.	Práctica de operaciones. Memorización de resultados.
10. Escribir en lenguaje matemático cualquiera de las acciones realizadas.	Significado real de las cifras escritas y de los signos de las operaciones.

Sistema decimal de numeración y primeros algoritmos

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
11. Leer y representar con unidades y decenas, los números comprendidos entre el 10 y el 20.	Valor de la decena. Números del 10 al 20 y nombre correcto de cada uno.
12. Interpretar y representar con regletas los números de dos y tres cifras.	Escritura y lectura correcta de los números.
13. Utilizar indistintamente la placa o cuadrado del 100, o diez regletas del 10 para representar centenas.	Noción de centena y familiarización con su concepto.
14. Construir series numéricas, hasta el 999, sumando o restando un número fijo.	La serie numérica hasta el 1000.
15. Descomponer un número, enunciado verbalmente, en unidades, decenas y centenas, indicando los diferentes órdenes de unidades. Si procede, después escribirlo.	Valor posicional de las cifras en el sistema decimal de numeración.
16. Cambiar correctamente las centenas y las decenas por las decenas y las unidades correspondientes.	Equivalencias entre los diferentes órdenes de unidades.
17. Realizar sumas y restas con dos o más números únicamente con el	Comprensión del significado real de sumas y restas escritas, con números grandes, y preparación para la eventual práctica

material, haciendo corresponder las unidades del mismo orden y realizando los cambios de unidades necesarios. **18.** Escribir, siempre en forma horizontal, algunas operaciones hechas con el material. **19.** Practicar sumas y restas (también más tarde llevando) pasando a su escritura en forma vertical, y a la eventual resolución de algoritmos.	posterior de los algoritmos. Significado de las operaciones escritas como expresión de lo que se ha realizado con material o mentalmente. Comprensión de los algoritmos escritos, en el caso de que se trabajen.

PARA TRABAJAR CON LAS CAJAS 1 y 2. Ciclo medio de primaria

Multiplicación y división. Noción de cuadrado

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
20. Pasar de la repetición lineal (suma) de regletas iguales, a la multiplicación, poniendo las mismas regletas de forma rectangular. Añadirle la expresión escrita.	Noción de multiplicación como acción de sumar a una cantidad un número concreto. Signo escrito de la multiplicación.
21. Interpretar con material productos de dos factores enunciados verbalmente, incluyendo el caso de números mayores de 10. Cuando tenemos una configuración con material, decir verbalmente el producto que le corresponde.	Producto de dos factores, expresado por una configuración material de dos dimensiones. Reconocimiento y nombre de los factores y del resultado o producto.
22. Repetir productos ocultando el material previamente manipulado y memorizarlos.	Memorización de algunos productos sencillos experimentados varias veces.
23. Confeccionar con material la tabla de multiplicar hasta 6 x 6. Más tarde ampliarla hasta el 12 x 12, con material o dibujándola en un papel grande	Visualización de todos los productos de dos factores que podemos hacer con los primeros números naturales, de modo sistemático.
24. Hacer corresponder la escritura factorial y el resultado justo con cada uno de los productos construidos en la "tabla".	Conocimiento y memorización de la table de multiplicar. Su utilización en aplicaciones concretas.
25. Recoger la tabla de multiplicar, colocando cada producto encima de su simétrico respecto de la diagonal principal haciéndolos coincidir. Descubrir curiosidades.	Algunas propiedades de la tabla de multiplicar: simetría respecto de la diagonal; igualdad de tamaño de algunos productos, etc ...
26. Observar el lugar de los productos formados por los mismos factores pero con orden inverso, y constatar que son	Propiedad conmutativa de la multiplicación

iguales.	Noción experimental del cuadrado de un número y posterior paso a la noción numérica.
27. Reconocer tanto la forma de los productos de dos factores iguales como su posición particular (en la diagonal)	
28. Hacer corresponder a cada cuadrado su escritura numérica.	Simbología escrita del cuadrado, que más tarde pasará a todas las potencias.
29. Realizar juegos de descubrimiento del factor que falta para obtener un producto concreto.	Adquisición de agilidad en el cálculo mental. Ampliación del conocimiento de los números que se descomponen.
30. Descomponer un número concreto en producto de dos factores, de varias maneras posibles	Primera noción de división. Nombre de cada uno de los términos de la división: dividendo , divisor, cociente y residuo.
31. Repartir en partes iguales una cantidad representada con el material. Constatar cuál es el resultado y si sobran unidades o no.	Los signos de dividir (el escrito normalmente y el de la calculadora).
32. Expresar por escrito, en forma horizontal, las primeras divisiones hechas.	Noción de la división como descubrimiento del factor que falta en un producto, o sea como operación inversa de la multiplicación.
33. Disponer una cantidad concreta en forma de un rectángulo, del cual conocemos un lado.	Noción de doble, triple, y de fracciones sencillas, como operadores de dividir por 2,3,4, etc ...
34. Practicar casos concretos de doble y mitad; de triple y tercera parte, etc...	Descubrimiento de las estrategias convenientes para resolver cualquier tipo de reparto.
35. Repartir una cantidad concreta en dos partes, de tal manera que una sea el doble de la otra.	Descubrimiento de que la relación entre los cuadrados de dos números no coincide con la relación entre los números .
36. Comparar entre sí los cuadrados más conocidos, de dos números que son uno el doble del otro, y buscar cuantas veces el cuadrado menor cabe en el otro.	Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.
37. Multiplicar un número por una suma, haciéndolo de dos maneras: primero hacer la suma y después multiplicar, o sumar después de hacer los dos productos. Comparar los resultados.	Nociones de frecuencia y de media aritmética.
38. Expresar con regletas los resultados de una estadística sencilla. Llegar a su valor medio haciendo con el material las compensaciones necesarias.	Valoración de las propiedades aprendidas para darnos la posibilidad de calcular mentalmente con facilidad.
39. Buscar y encontrar estrategias personales de cálculo mental con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones	Dominio del cálculo mental. Producto de tres factores, expresado por

sencillas, y practicar la estimación de resultados. **40.** Construir productos de tres números, repitiendo un producto de dos factores tantas veces como indica el tercer factor. **41.** Resolver multiplicaciones de tres o más factores, asociándolos previamente de diferentes maneras, y comprobar que el resultado es siempre el mismo. **42.** Construir productos de tres factores iguales, a partir de regletas y a partir de los cuadrados correspondientes. Observar que obtenemos cuerpos en forma de cubo. **43.** Generalizar resultados, en los casos muy experimentados, cuando sea posible, y expresarlos verbalmente. **44.** Escribir en lenguaje matemático cualquiera de las acciones realizadas.	una configuración material de tres dimensiones. Propiedad asociativa de la multiplicación Primera noción experimental del cubo de un número. Primer paso a la abstracción, según la propia capacidad de cada cual. Significado real de todos los signos aprendidos: de multiplicar y de dividir, fracciones y paréntesis.

Sistema decimal de numeración. Algoritmos de las operaciones.

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
45. Interpretar números (hasta los millares) construidos con material, y viceversa, construir los que se expresan verbalmente.	Escritura y lectura correcta de números de cuatro o más cifras.
46. Representar el millar indistintamente con el cubo de 1000 o con 10 placas de 100. Practicar cambios de unidades.	Noción del millar, familiarización con los diferentes órdenes de unidades y equivalencias entre ellos.
47. Construir series numéricas con números grandes, sumando o restando un número fijo de decenas o de centenas.	Descubrimiento de estrategias personales que simplifiquen los cálculos.
48. Buscar la explicación de hechos que pueden aparecer al calcular con calculadora o por escrito y que parecen inexplicables. En particular encontrar la explicación de un resta “llevando” hecha con calculadora.	Razonamiento lógico utilizado en la comprensión de fenómenos y en la investigación de la verdad. Valoración del papel del material como herramienta de comprensión, y de la calculadora como motivación.
49. Hacer productos, como siempre en forma de rectángulo, de un número dígito por otro superior a 10, expresandolo con decenas y unidades o con decenas y	Refuerzo de la noción de producto y constatación de que el resultado no depende de la forma de expresar la operación.

regletas de colores.	
50. Hacer multiplicaciones sólo con el material, usando unidades, decenas y centenas, realizando los cambios necesarios entre ellas. Después anotar el resultado.	Significado real de multiplicaciones con números grandes y preparación para una eventual práctica posterior de sus algoritmos.
51. Hacer divisiones de números grandes (con unidades, decenas y centenas) por un número dígito, en forma de repartir y en forma de construir un rectángulo. Anotar el cociente y el residuo.	Significado real de la división exacta como operación inversa de la multiplicación, y primera noción de la división entera. Preparación para el futuro algoritmo.
52. Hacer un número (unidades y decenas) 10 o 100 veces mayor, sólo cambiando las unidades de un orden por otros del orden siguiente, o de dos órdenes más allá.	Consolidación del valor posicional de las cifras, del sistema decimal y de la noción de multiplicación.
53. Multiplicar un número (con unidades y decenas) por 20, 30, etc., multiplicándolo por 2,3 ... etc ... y después por 10.	Aplicación de la propiedad asociativa para preparar la práctica de multiplicaciones escritas con números de dos cifras.
54. Aplicando las anteriores propiedades, y haciendo los cambios de unidades necesarios, multiplicar un número por otro de dos cifras. Eventualmente pasar a la justificación del algoritmo correspondiente.	Compresión, tanto del algoritmo escrito, de la multiplicación, como de la naturaleza de esta operación.
55. Comprobar con la calculadora los resultados de diversas operaciones hechas con material.	Valoración del papel de la calculadora en la realización de los nuevos cálculos.

PARA TRABAJAR CON LAS CAJAS 1, 2 y 3. Ciclo superior de primaria

Multiplicación, división y sus propiedades. Cuadrados y cubos. Divisibilidad.

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
56. Interpretar con el material productos de tres factores enunciados verbalmente. Reconocer y verbalizar el producto de tres factores que corresponde a una configuración concreta.	Familiaridad con los productos de tres factores y fluidez en su utilización, de cara al cálculo mental.
57. Construir productos de tres factores hechos a partir de los mismos números, pero cambiando el orden de los factores. Compararlos y constatar que valen igual.	Ampliación de la propiedad conmutativa a productos con cualquier número de factores.
58. Buscar el tercer factor de un producto del que se conocen otros dos y el resultado.	Profundización de la noción de producto de tres factores.

59. Calcular productos de tres factores haciendo previamente una estimación del resultado y comprobándolo después con el material.	Práctica de cálculo mental.
60. Construir el cubo de un número dígito concreto, con regletas, con placas de cuadrados, y asociándolo directamente con las piezas de los cubos. Memorizar su valor.	Noción de cubo de un número natural.
61. Hacer corresponder a cada cubo su escritura numérica.	Simbología escrita del cubo de un número
62. Descomponer un número concreto en producto de tres factores, de varias maneras posibles. (Es preciso que el número lo permita, y es recomendable hasta 1000).	Práctica de cálculo mental y ampliación del conocimiento de los números.
63. Representar con el material algunas divisiones de números superiores a 100 por números más pequeños, construyendo un rectángulo que tenga un lado del tamaño del divisor. Constatar que el cociente es el mismo que si lo hiciésemos repartiendo.	Significado real de la división como operación inversa a la multiplicación.
64. En la actividad anterior, reconocer el residuo, si es el caso, y buscarlo de dos maneras: la cantidad que sobra, o la que falta para que el cociente sea una unidad mayor.	Reconocimiento de la división entera y su propiedad fundamental. Cociente por defecto y por exceso y sus propiedades. Condición que debe cumplir el residuo.
65. Descomponer un número de muchas maneras a partir de la combinación de productos, cuadrados y cubos conocidos.	Aplicación al cálculo mental de todas las operaciones trabajadas.
66. Construir cuadrados a partir de un cuadrado más pequeño o de varios cuadrados. Pasar a la escritura matemática de lo que se ha hecho.	Consolidación de la noción de cuadrado. Dominio del lenguaje matemático escrito.
67. Ordenar los cuadrados del 1 hasta el 10. Observar la diferencia entre el crecimiento de los números naturales y el de sus cuadrados.	Ampliación del conocimiento de los números cuadrados.
68. Comparar el cuadrado de un número con el de otro número que sea doble, triple...de aquél. Predecir cuantas veces el cuadrado pequeño cabrá en el grande, y después comprobarlo.	Comprensión del hecho que la razón entre los cuadrados de dos números es precisamente el cuadrado de la razón entre los dos números.
	Conocimiento del dm^2 y de su equivalencia

69. Medir el lado de la placa del cuadrado de 10 y comparar resultados de la actividad anterior con el número de cm^2 que caben en un dm^2.	en 100 cm^2.
70. Comparar dos productos de dos factores en el caso de que los factores de uno sean el doble de los correspondientes del otro. Buscar y justificar cuantas veces el pequeño cabe en el grande.	Descubrimiento del hecho que, al doblar cada uno de los dos factores, el producto no se dobla, sino que se cuadruplica.
71. Construir los cubos de 4, de 6, de 8 , de 9 y de 10 a partir de cubos más pequeños (todos iguales). Ver cuantos se necesitan en cada caso y escribirlo con números y signos.	Consolidación de la noción de cubo. Dominio del lenguaje matemático escrito.
72. Ordenar los cubos, del 1 hasta el 10. Observar la diferencia entre el crecimiento de los números naturales, el de sus cuadrados y el de sus cubos.	Ampliación del conocimiento de los números cúbicos.
73. Comparar el cubo de un número con el de otro que sea doble o triple. Predecir cuantas veces el cubo pequeño cabrá en el grande, y después comprobarlo.	Descubrimiento de que la relación entre los cubos de dos números no coincide con la relación entre los números ni la relación entre sus cuadrados.
74. Medir la arista del cubo de 10 y comparar resultados de la actividad anterior con el número de cm^3 que caben en un dm^3.	Conocimiento del dm^3 y de su equivalencia en 1000 cm^3.
75. Dividir un número inferior a 1000 por 6, directamente con el material, después dividir por 3 y a continuación por 2.	Propiedad asociativa de la división.
76. Repetir la experiencia anterior con otros casos parecidos. Observar qué pasa con el cociente y con el residuo, y sacar conclusiones.	Razonamiento lógico aplicado en las operaciones.
77. Buscar y encontrar estrategias personales de cálculo mental en todas las operaciones trabajadas, particularmente a partir de la propiedad distributiva.	Valoración de les propiedades aprendidas para hacernos posible calcular mentalmente con facilidad. Dominio del cálculo mental.
78. Generalizar los resultados obtenidos, principalmente descubriendo propiedades de los números y operaciones, y expresándolas correctamente en lenguaje verbal.	Formulación de leyes generales. Paso al pensamiento abstracto.
79. Repitiendo varias veces un mismo número (tanto de una sola regleta como	Noción de múltiple. Varios múltiples de un número.

mayor que 10), obtener varios múltiples. Anotar sistemáticamente los resultados. **80.** Investigar curiosidades de los múltiples de un número: relaciones de doble, triple.... etc., y posibilidad de seguir siempre. **81.** Descomponer un número en regletas todas iguales, de todas las maneras posibles. Hacer una lista de todas las regletas que nos sirven para hacerlo. **82.** Reconocer casos carentes de otros divisores que no sean ellos mismos y la unidad. Buscar varios y hacer una lista. **83.** A partir de dos números diferentes, construir muchos múltiples de cada uno. Después buscar los que se encuentran en ambas colecciones. Intentar encontrar el mayor. **84.** A partir de dos números diferentes, buscar todos los divisores de cada uno. Después buscar los que se encuentran en ambas colecciones. Intentar encontrar el mayor y el menor. **85.** Representar una situación numérica concreta, enunciada en forma de problema, en la cual conocemos el resultado, pero tenemos un dato desconocido. Encontrar con el material el dato que falta.	Comparación con la tabla de multiplicar. Propiedades de los múltiples de un mismo número. Número ilimitado e imposibilidad de encontrar el mayor. Noción de divisor. Conjunto de todos los divisores de un número. Reciprocidad de las relaciones “ser múltiple” y “ser divisor”. Números primeros. Múltiples comunes a diversos números. Descubrimiento de que su número es ilimitado, y de que por lo tanto no existe el mayor, pero sí el menor. Divisores comunes de diversos números. Descubrimiento de que su número es limitado y que siempre podemos encontrar el mayor. Constatar que el más pequeño siempre es 1. Preparación para la futura resolución de ecuaciones.

Sistema decimal de numeración. Algoritmos de la división y de la resta.

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
86. Expresar con el material cantidades hasta los millares e incluso imaginar cantidades más grandes (puesto que el material no nos llega). Adivinar cuántas decenas contiene en total la cantidad y después comprobarlo. **87.** Repetir la experiencia de la actividad 63 detallando los diversos pasos de la resolución de una división y, a medida que lo hacemos, escribir en un papel los resultados parciales obtenidos. **88.** Representar con el material el	Profundización en la comprensión de los diferentes órdenes de unidades del sistema decimal de numeración. Razonamiento lógico aplicado a la resolución de la división y descubrimiento personal del algoritmo de esta operación. Asimilación consciente de una práctica

algoritmo de la resta “llevando”, ya conocido, explicar todos los pasos y justificarlos de forma razonada con el material.	numérica conocida y probablemente aprendida de forma mecánica.

PARA TRABAJAR CON LAS CAJAS 1, 2 y 3. Primer ciclo de ESO

Para este ciclo son recomendables todas las actividades que se han dado como propias del Ciclo Superior de Primaria, y además las que indicamos a continuación.

ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS QUE FAVORECEN
89. Comparar los cuadrados de dos números, uno de los cuales es múltiple del otro, y observar la relación que hay entre los dos cuadrados, realizándolo con el material, y expresándolo verbalmente y por escrito.	Descubrimiento de que la relación entre los cuadrados de dos números es precisamente el cuadrado de la relación entre los números.
90. Hacer lo mismo comparando los cubos de dos números, uno de los cuales es múltiple del otro. Aplicar el caso a situaciones conocidas, especialmente de medidas de volumen.	La relación entre los cubos de dos números es igual al cubo de la relación entre los números. Preparación para un significado realista de les potencias.
91. Buscar qué regletas debemos añadir al cuadrado de un número para que llegue a igualar el del número siguiente. Repetirlo en diversos casos y encontrar la norma.	Mayor conocimiento de los cuadrados y de su crecimiento. Descubrimiento de una ley general, en un caso poco utilitario, por el placer de investigar.
92. Cuando tengamos una cantidad (primero inferior a 100, y después superior), ponerla con el material en forma de cuadrado. Ver y anotar cuál es el lado del cuadrado y constatar el número de unidades que sobran. Escribir una igualdad que exprese lo que hemos hecho.	Noción de raíz cuadrada como operación inversa de hacer el cuadrado (sin pasar al algoritmo). Signo de la raíz cuadrada. Número de cifras del número concreto y del resultado. Valor máximo del residuo, en relación a la actividad 91.
93. Buscar qué regletas debemos añadir al cubo de un número para que llegue a igualar el del número siguiente. Repetirlo en diversos casos y expresarlo por escrito.	Mayor conocimiento de los cubos y de su crecimiento. Relación de este crecimiento con el de las medidas de volumen.
94. Cuando tengamos una cantidad, ponerla con el material en forma de cubo. Ver y anotar cuál es la arista del cubo y constatar el número de unidades que sobran. Escribir una igualdad que exprese lo que hemos hecho.	Noción de la raíz cúbica, sólo a nivel experimental. Su signo escrito.
95. Representar con regletas una suma muy sencilla, y después construir su cuadrado. A continuación intentar otra cosa: hacer el cuadrado de todos los sumandos y luego sumarlos. Después de hacer una previsión, comprobar si el resultado es el mismo o no, y, en tal caso,	Comportamiento del cuadrado de la suma de dos números. Si interesa puede hacerse extensivo al cubo de la suma de dos números.

investigar por qué o al menos explicar qué pasa. **96.** Representar con material una división entera, multiplicar el dividendo y el divisor por un mismo número e investigar qué pasa con el cociente y con el residuo. **97.** Configurar con el material una serie de múltiples de dos números (y después de tres), comenzando cada vez por el más pequeño posible. Encontrar todos los que son comunes a todos los números dados, y entre ellos escoger al más pequeño. Observar que todos los otros son múltiples de éste. **98.** Dados dos o tres números con el material, buscar todos los divisores de cada uno, y entre todos escoger al mayor. **99.** Representar con las regletas situaciones numéricas y problemas con datos desconocidos. Pasar a su expresión escrita en forma de ecuación y discutir esta escritura a la vista del material. **100.** Después de la actividad anterior, seguir con el material y con todo detalle cada uno de los pasos que se deben hacer para encontrar el valor de la incógnita, y simultáneamente pasarlos a la expresión escrita en el papel, con números y letras.	 Una propiedad muy importante de la división entera. Comprensión del mínimo común múltiple de dos o más números. Llamarlo: "el múltiple común más pequeño". Comprensión del máximo común divisor de dos o más números. Llamarlo: "el divisor común más grande". Comprensión del significado real de una ecuación escrita, y de los valores representados por las letras. Introducción al lenguaje del álgebra. Descubrimiento de las normas a seguir para deducir el valor de la incógnita de una ecuación, antes de cogerlo como una mecánica.

ALGUNOS EJEMPLOS

1. **“Saber hacer, saber decir y saber escribir”.**
2. **Números pares y nones.**
3. **La tabla de multiplicar.**
4. **Descomposición factorial de números.**
5. **Dos maneras de multiplicar un número por una suma.**
6. **¿Por qué hacemos restas “llevando”?.**
7. **Multiplicar por 10, por 20, por 30... ¡y por todo!**
8. **Las divisiones escritas.**
9. **Comparar cuadrados y comparar cubos.**
10. **Cómo crecen los cuadrados y cómo hacemos la raíz cuadrada.**
11. **El cuadrado de una suma.**
12. **Las ecuaciones.**

Ejemplo 1. “Saber hacer, saber decir y saber escribir”

1ª parte

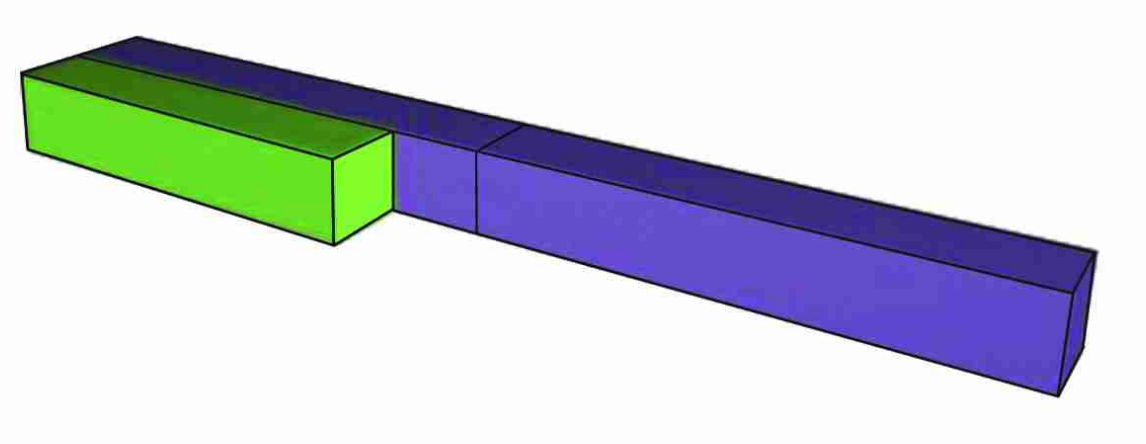
7. Configurar con regletas construcciones correspondientes a relaciones numéricas expresadas verbalmente y viceversa.	Concreción de la relación entre la acción y los significados matemáticos aprendidos. Fijación de los significados.

El maestro propone a los niños y niñas:

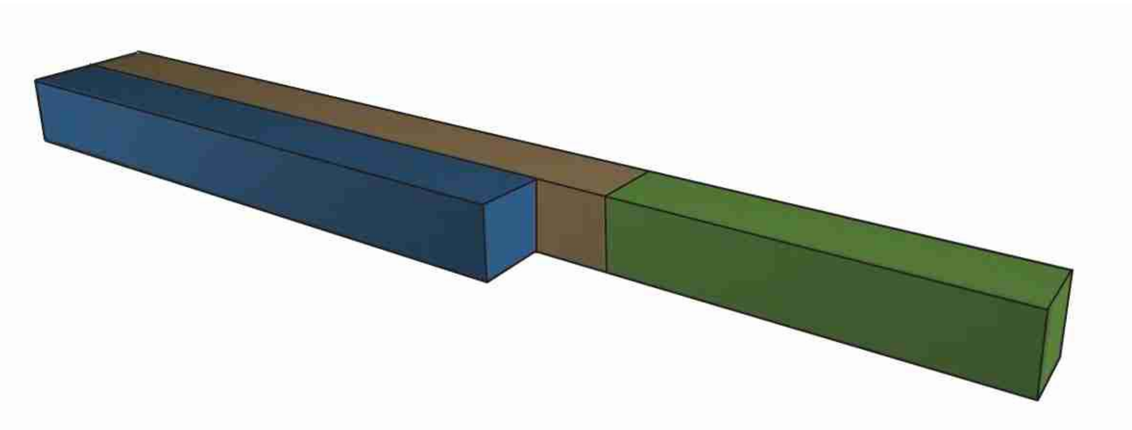
*A ver si sabéis poner con las regletas**: Dos veces el seis, menos un cinco.***

Hay varios intentos, y van saliendo algunas formas.
Es importante que para cada una se vaya comentando si es válida o no, y por qué.

Entre todos decidimos quedarnos con ésta:



Si tenemos la suerte de que alguien dice que ya se ve el resultado, lo valoramos, porque es un inicio de cálculo mental. Si nadie no aparece espontáneamente, podemos provocarlo, pidiendo si saben cuál será el resultado sin tener que poner la regleta que falta.
Cuando los niños ya tienen un poco de seguridad en representar pequeñas operaciones o relaciones enunciadas, podemos presentar el ejercicio de forma inversa, o sea, haciendo nosotros una construcción sencilla con las regletas y pidiéndoles que expresen verbalmente aquello que representa
Como ocurre normalmente en estos casos, habrá diversas respuestas válidas.
Así, si hemos hecho



algunos niños y niñas responden:

“Yo veo que diez y cinco es mayor que nueve.”
“ Aquí dice quince menos nueve, a ver cuántos faltan....”
“ Nueve más un número que falta son quince.”
“ Yo quiero poner un seis para que pueda decir que seis y nueve son quince.”
“Podemos hacer el quince con un nueve y otro número que no sabemos cuál es, pero es más pequeño que nueve.”
“Tenemos que buscar un número que sumado con el nueve nos dé igual que el diez sumado con el cinco.”

Podemos dar por válidas estas respuestas, entre otras, siempre y cuando no contengan un error. Es importante constatar la riqueza de esta diversidad.

2ª parte

Si la actividad ha resultado rica y los alumnos no están cansados, podemos aprovechar el momento para añadir otra cosa, referente a otro punto:

10. Escribir en lenguaje matemático cualquiera de las acciones realizadas.	Significado de las cifras escritas y de los signos de las operaciones .

El maestro propone a los niños y niñas:

Como lo habéis pensado bien y ya sabéis decirlo en voz alta, ahora entre todos intentaremos escribir lo que habéis dicho sin letras, sólo con números y signos:

Pueden salir cosas como ésta: 15 – 9 =.... ...(y aquí algún signo o dibujo, que significa "misterio"....) Es una manera suficientemente válida.
Entre las respuestas verbales que hemos citado anteriormente, tal vez la cuarta será la que les va a costar menos de escribir: 6 + 9 = 15
Posiblemente la primera no será fácil, y tendremos que intervenir nosotros porque se debe llegar a la expresión correcta 10 + 5 > 9
En la quinta, primero buscaremos cuál es el número. Después podremos escribir 15 = 9 + 6 (puesto que al hablar nombraremos primero el 15), y habrá que añadirle al lado 6 < 9, puesto que es lo que habíamos dicho.
Finalmente, en la última, se trataría de llegar a escribir 6 + 9 = 10 + 5.

Este ejercicio no es propiamente de cálculo, puesto que el sencillo cálculo que se requería en este caso se ha superado desde un principio, sino que es de **lenguaje matemático** escrito, el cual a menudo dejamos demasiado de lado, y que es un aspecto que se debe cultivar durante toda la primaria.

Ejemplo 2. Números pares y nones.

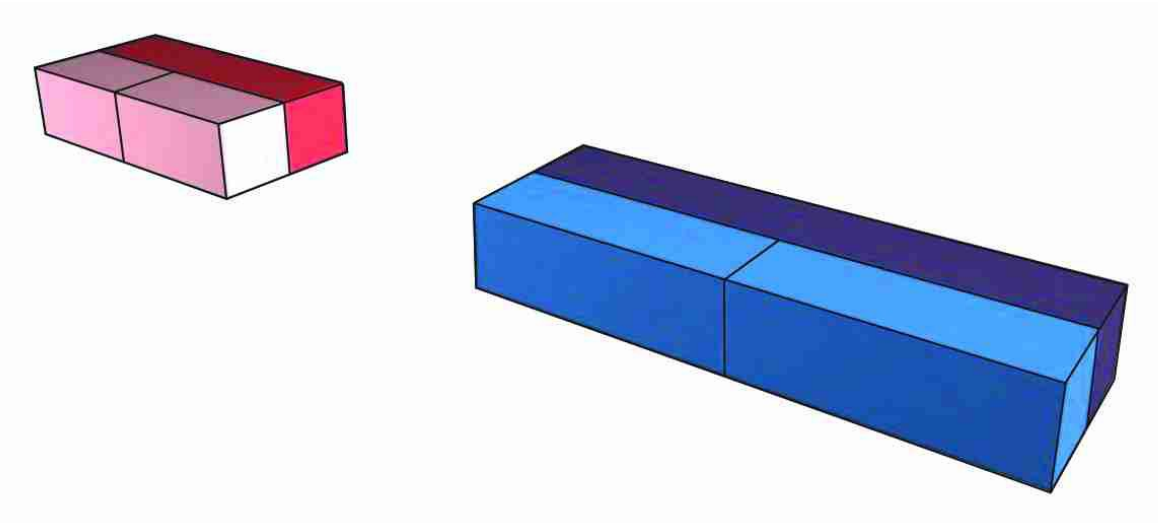
1ª parte

8. Separar los números conocidos (regletas) en dos grupos: los que pueden formarse con la suma de dos de iguales, y los que no.	Descubrimiento y conocimiento de los números pares y nones

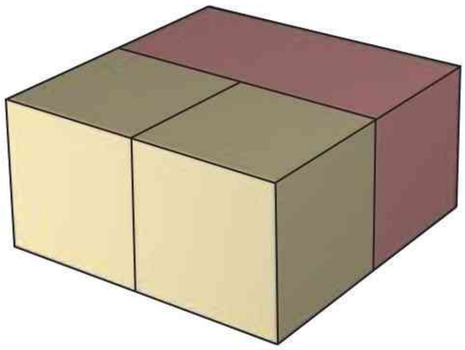
El maestro propone:

A ver si sabéis encontrar todas las regletas, o sea todos los números conocidos, que se pueden obtener sumando dos regletas iguales. A medida que los encontréis, los vais poniendo hacia este lado (hacia la derecha)

Entre todos van encontrando algunos, como por ejemplo éstos:



Tal vez habrá que ayudarles para que no se olviden de éste

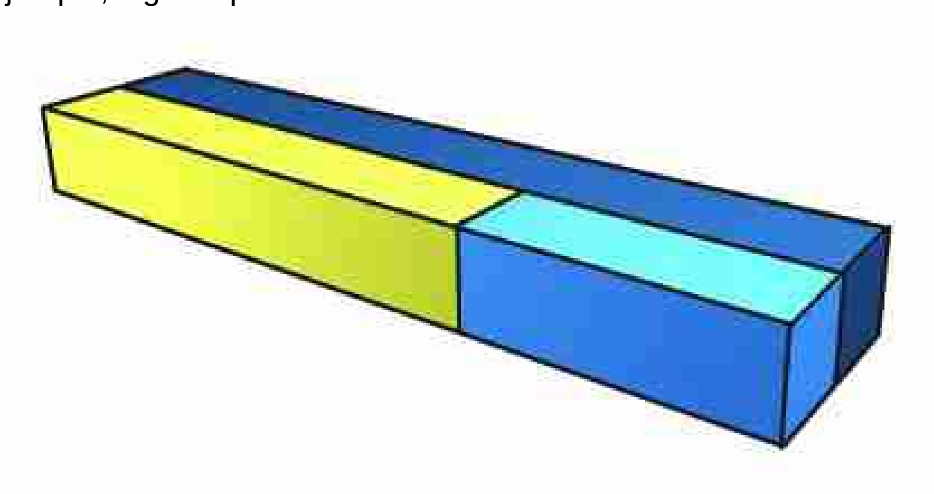


Alguien pregunta si podemos probarlo con números mayores de 10.
Respondemos: ¡*Ya lo creo que sí!* ... Y un niño, desde a lo lejos dice: ¡C*laro, porque los números no se acaban nunca!*

Cuando ya los tienen todos hasta el 12, o hasta el 20, les pedimos:
Ahora decid en voz alta lo que habéis hecho.
Después poned al otro lado de la mesa las regletas que no habéis podido utilizar sumando dos iguales.

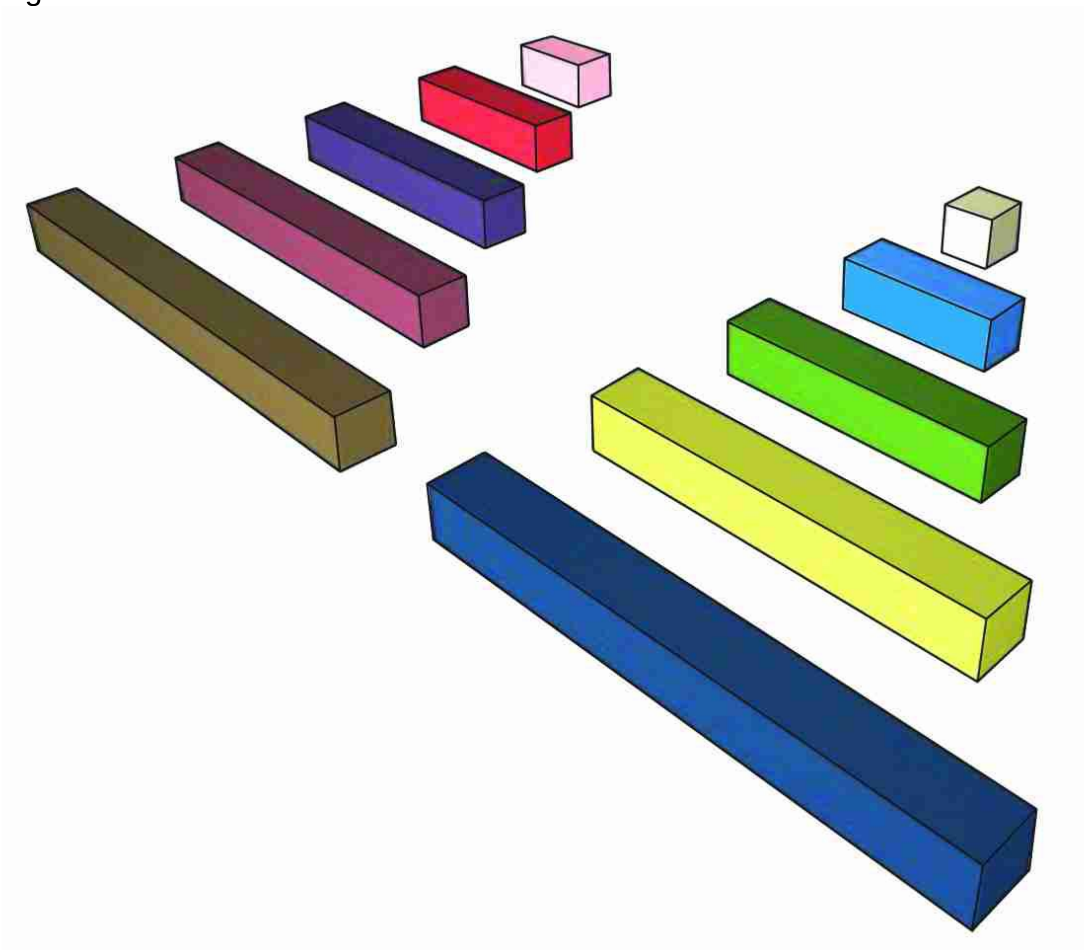
Continuamos:
Ahora podríamos buscar una manera de construir también estas regletas que tenemos hacia la izquierda con dos regletas. Ya sabemos que no serán iguales, pero a ver si conseguimos que las dos sean muy parecidas, o sea "seguidas" (por ejemplo, yo puedo hacer el 5 con un 2 y un 3).

Todos buscan y aportan ideas.
Si, por ejemplo, alguien pone eso



tenemos que intervenir y decirle que no vale, porque el 3 y el 6 no son dos números “seguidos”, son demasiado diferentes. Se debe seguir buscando hasta que lleguemos a descomponer el 9 de la forma 4 + 5. Si nadie lo consigue, tendríamos que recogerlo y dejar la actividad para otro día, pero sobre todo **no dar nosotros la solución**, porque eso no deja a los niños y niñas la puerta abierta para sus descubrimientos.

Llegado este momento, entre todos tendremos sobre la mesa la posición siguiente:



Éste sería un momento adecuado para dar nosotros la información apropiada:

Estos números que tenemos a la derecha, y todos los que vendrían después, o sea los que pueden hacerse sumando dos números iguales, se llaman ***números pares***
Los de la izquierda, que no pueden hacerse sumando dos números iguales, pero que pueden hacerse sumando dos números seguidos, se llaman ***números nones o impares.***

Llegados a este punto, la actividad se ha terminado. Probablemente vemos que los alumnos han aprendido una noción nueva, pero sobre todo es importante que hayan trabajado habilidades matemáticas básicas, como son: observar, descubrir a partir de la experimentación, encontrar estrategias para resolver interrogantes, expresarse con un mínimo de precisión, entre otros.

2ª parte

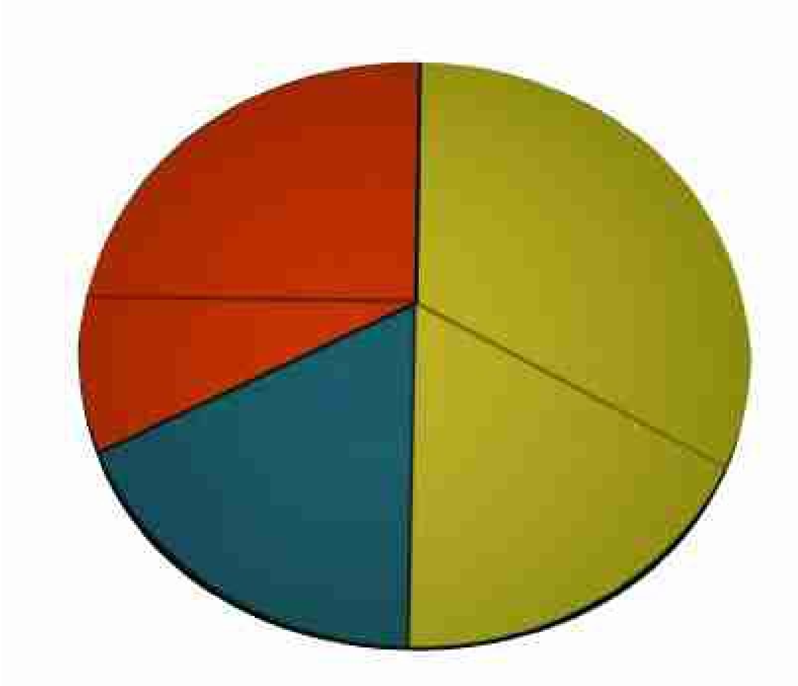
Se trata de aprovechar al máximo un hecho de la clase, tanto para nosotros como para los otros.

Al finalizar la actividad anterior, un niño de la clase de 2º dijo gritando:
"¡Seño! ¡Entonces, todos los números del mundo pueden hacerse sumando dos números iguales o sumando dos números seguidos"!!

Aquí podemos ver un caso particular, en el cual este niño ha dado un paso muy grande de **generalización.**
Una exclamación como ésta es muy importante. No se produce todos los días, y cuando se produce, casi tendríamos que hacer una fiesta en clase para celebrarlo, porque se trata de un auténtico **descubrimiento.**

Podríamos escribir la frase en una cartulina bastante grande, dibujar las regletas abajo, llevarla a la clase de los de 5º, que son muy mayores, y preguntarles si creen que eso es verdad o no.
Evidentemente para nuestros alumnos de 2º., "todos los números del mundo" son los números naturales. Sería muy positivo que los de 5º. lo entendiesen, y a partir de aquí les entrase la curiosidad y el interés de ver qué pasa con otros números que ellos ya conocen.
Eso podría ser para ellos un punto de partida para hacer otras descomposiciones curiosas de números quebrados, con materiales propios para las fracciones, por ejemplo:

Juego de ver quién encuentra más igualdades donde



intervengan restas y sumas, combinando
sólo estas fracciones: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6
como por ejemplo:

1/3 = 1/2 – 1/6 ...   1/4 = 1/3 + 1/6 – 1/4 ... (Hay muchas más)

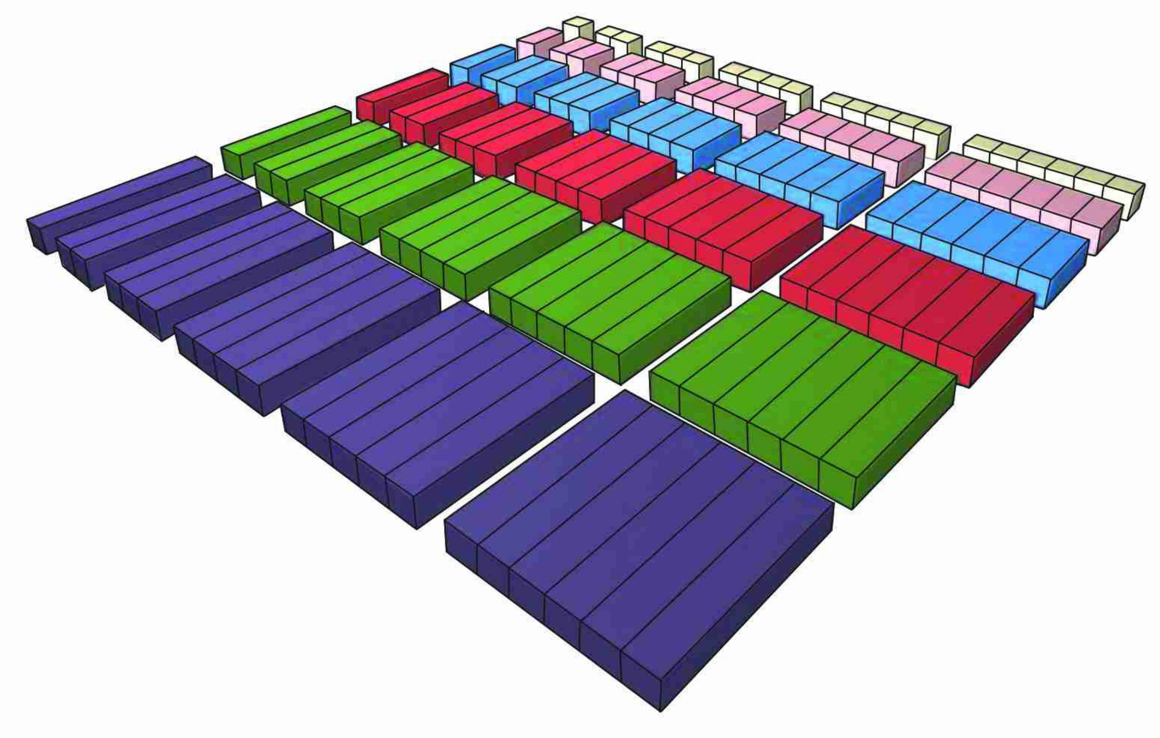
¡El trabajo de investigación y de descubrimiento es la auténtica manera de aprender a todas las edades!

Ejemplo 3. La tabla de multiplicar

1ª parte

23. Confeccionar con material la tabla de multiplicar, hasta el 6 x 6.	Visualización de todos los productos de dos factores que podemos hacer con los primeros números naturales, de modo sistemático.
24. Hacer corresponder la escritura factorial y el resultado justo con cada uno de los productos construidos en la “tabla”.	Conocimiento y memorización de la tabla de multiplicar. Su utilización.

Se trata de configurar la tabla de multiplicar, tal y como vemos en el gráfico adjunto.



Esta actividad es más de aprendizaje y memorización que no de descubrimiento. Al ver la tabla terminada, los niños y niñas, organizados por equipos, se hacen mútuamente preguntas de diferentes tipos y las responden, por ejemplo:

- *¿A qué fila o columna encontrarías los productos de la familia del 3?*
- *Señala los productos siguientes: 4 X 6   5 X 2   1 X 4   3 X 3, ...*
- *A primera vista, ¿qué producto crees que es mayor, el 5 X 2 o el 3 X 4? compruébalo. Señala uno que sea un poco más pequeño que 3 X 5*
- *¿ Cuál es el producto hecho con cuatro cincos? ¿Cómo se llama?*
- *Escribe en un papel estos dos productos (y se señalan con el dedo)*

Otro tipo de ejercicio consiste en trabajar con dos series de 36 pequeñas tarjetas que previamente habremos preparado y cortado para que estén sueltas, y que llevan la escritura numérica de todos los productos de nuestra tabla.

Las de la primera serie son éstas:

1 X 1	1 X 2	1 X 3	1 X 4	1 X 5	1 X 6
2 X 1	2 X 2	2 X 3	2 X 4	2 X 5	2 X 6
3 X 1	3 X 2	3 X 3	3 X 4	3 X 5	3 X 6
4 X 1	4 X 2	4 X 3	4 X 4	4 X 5	4 X 6
5 X 1	5 X 2	5 X 3	5 X 4	5 X 5	5 X 6
6 X 1	6 X 2	6 X 3	6 X 4	6 X 5	6 X 6

Simplemente los niños y niñas deben poner cada targetita encima del producto correspondiente.
Advertimos que, para simplificar, consideraremos que la tarjeta 2 X 5, por ejemplo, se puede poner indistintamente con el producto hecho con cinco doses, o con el producto hecho con dos cincos, y así en todos los casos.

Las de la segunda serie (según los niños, “mucho más difíciles”) son éstas:

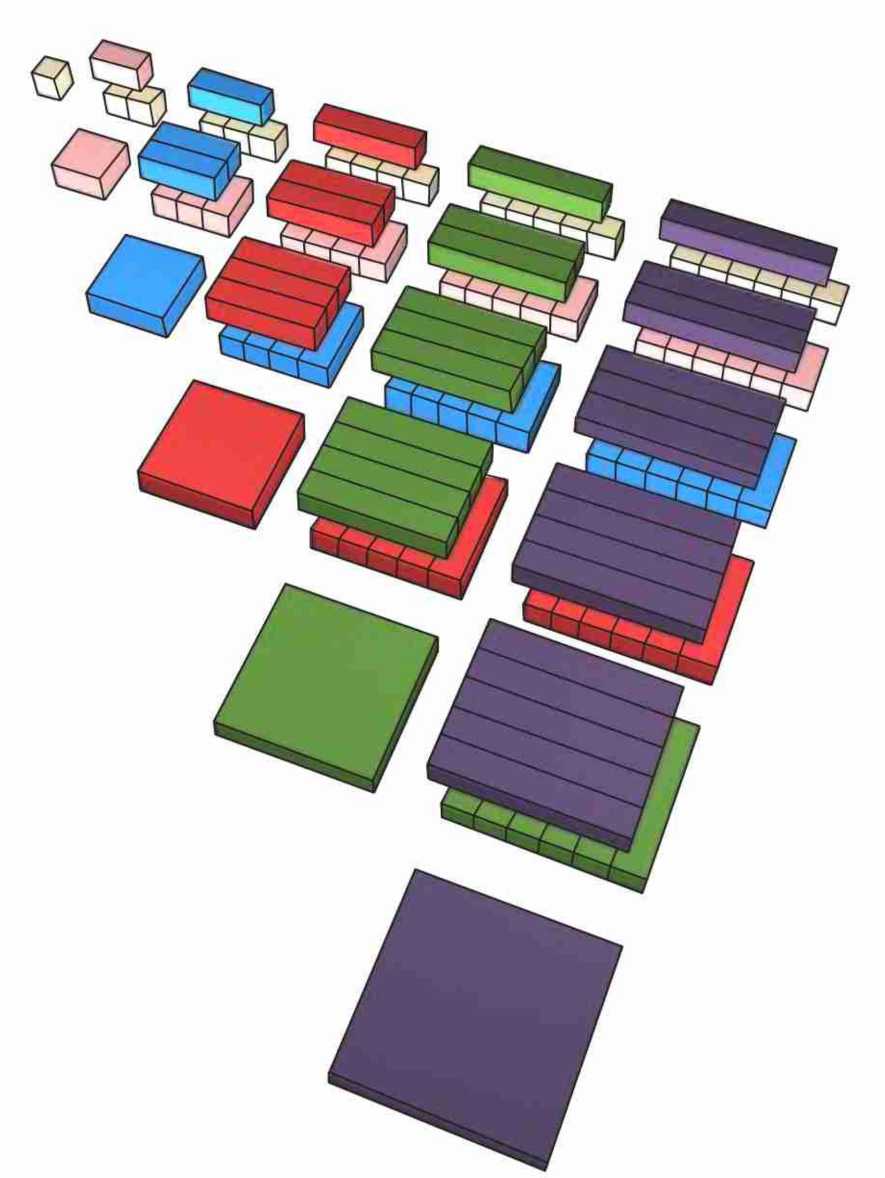
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

Se les dan las tarjetas sueltas y mezcladas, y ellos deben ponerlas encima del producto que tiene aquel valor.
En general eso les interesa mucho más que repetir la tabla de memoria, y la aprenden igual o mejor. Se dan cuenta por ellos mismos que el hecho de haber memorizado los “productos más importantes” les simplifica la resolución de otras muchas actividades, como la que presentamos en el próximo ejemplo 4, aunque siempre conservan la libertad de contar y comprobarlo si lo necesitan

2ª parte.

25. Recoger la tabla de multiplicar, colocando cada producto encima de su simétrico respecto de la diagonal principal haciéndolos coincidir. Descubrir curiosidades.	Algunas propiedades de la tabla de multiplicar: simetría respecto de la diagonal; igualdad de tamaño de algunos productos, etc ...
26. Observar el lugar de los productos formados por los mismos factores, pero con orden inverso, y constatar que son iguales.	Propiedad conmutativa de la multiplicación
27. Reconocer tanto la forma de los productos de dos factores iguales, como su posición particular (en la diagonal)	Noción experimental del cuadrado de un número y posterior paso a la noción numérica.

La realización práctica de esta actividad se hace siguiendo exactamente lo que dice el enunciado más arriba. La tabla, una vez recogida, queda así:



Una vez hecha esta construcción, se trata de observar muy bien, de ir diciendo cosas que vemos que han pasado, y de reconducir el diálogo hasta la formulación de los fenómenos numéricos que vamos descubriendo. Precisamente el aspecto más importante de esta actividad es la cantidad de propiedades de la multiplicación que seguramente los alumnos y nosotros mismos encontraremos.

Detallemos algunas:

- Podemos preguntar *en qué filas y columnas se encuentran "todos los productos del cuatro, del cinco"...etc ...* Observar las curiosidades de esta situación.

- Vemos que la tabla, respecto de la diagonal que aparece en nuestro dibujo, es simétrica no por lo que se refiere al color, sino por lo que se refiere al tamaño de los productos que hemos hecho coincidir, o sea, que tienen el mismo valor. Eso lo podemos formular también diciendo que cada producto es igual a otro con los mismos factores, pero con el orden invertido.

Si queremos podemos añadir que eso se llama “propiedad conmutativa de la multiplicación”, que es una particularidad que tiene esta operación; tal vez los niños la compararán con la de la suma, que ya conocen.

- Pero hay unos productos que no hemos puesto encima de ningún otro, que son precisamente los de la diagonal. Son los únicos que tienen ambos factores iguales. Debemos informar a los alumnos de su nombre: Son **los cuadrados.** Conviene aprender de memoria su valor (por el momento, sólo del 1 al 6) puesto que tal vez los tendremos que usar a menudo.
  En este momento vamos a sustituir estos productos, por las placas lisas cuadradas correspondientes. Diremos a los alumnos que, más adelante, cuando debamos utilizar los cuadrados, cogeremos siempre directamente las placas.

- También podemos descubrir estrategias muy útiles para el cálculo mental. Por ejemplo, si ya sabemos las tablas del 1 al 5 hasta llegar al X 6, cuando quiero aprender la del 6, los cinco primeros productos ya sabemos y sólo nos faltará el cuadrado... De ese modo, cada cual va encontrando sus propias estrategias, y podemos pedirles que las escriban, para formularlas bien y poderlas consultar en algunas ocasiones.

Ejemplo 4. Descomposición factorial de números

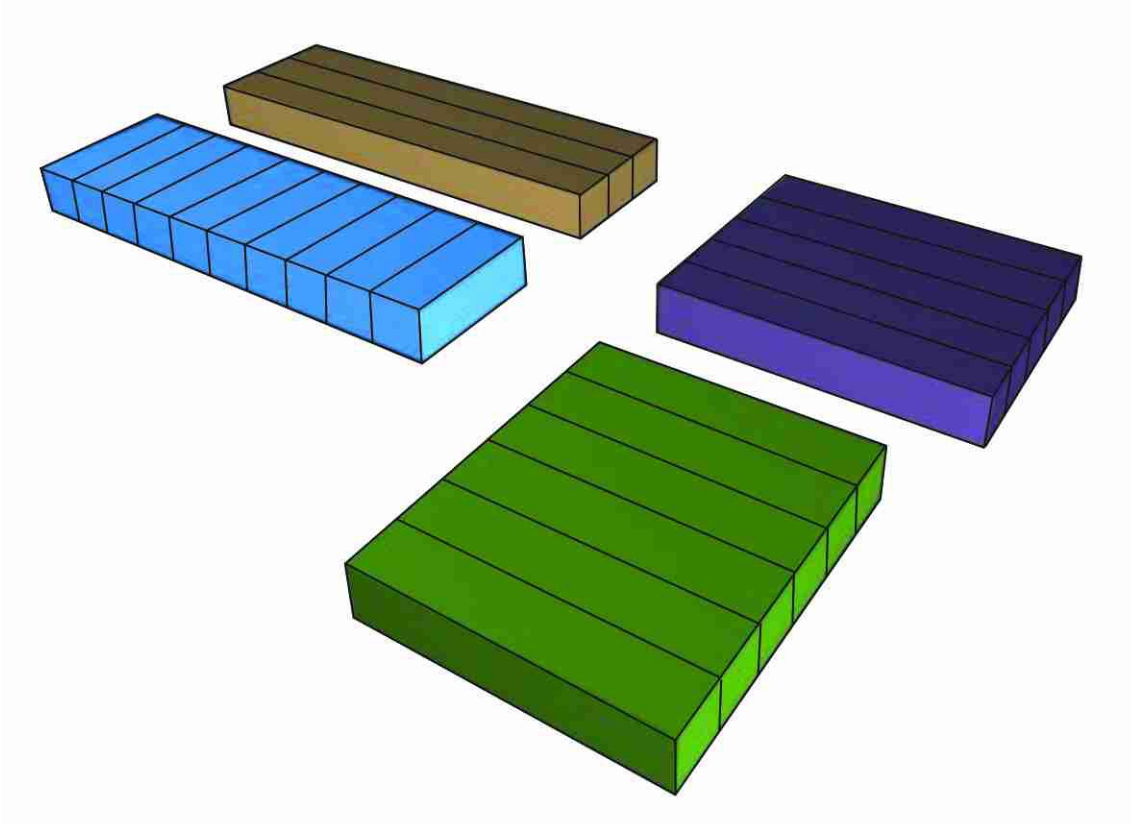
30. Descomponer un número concreto en producto de dos factores, de varias formas posibles.	Ampliación del conocimiento de los números que se descomponen.

1ª parte

El maestro propone a los niños y niñas:

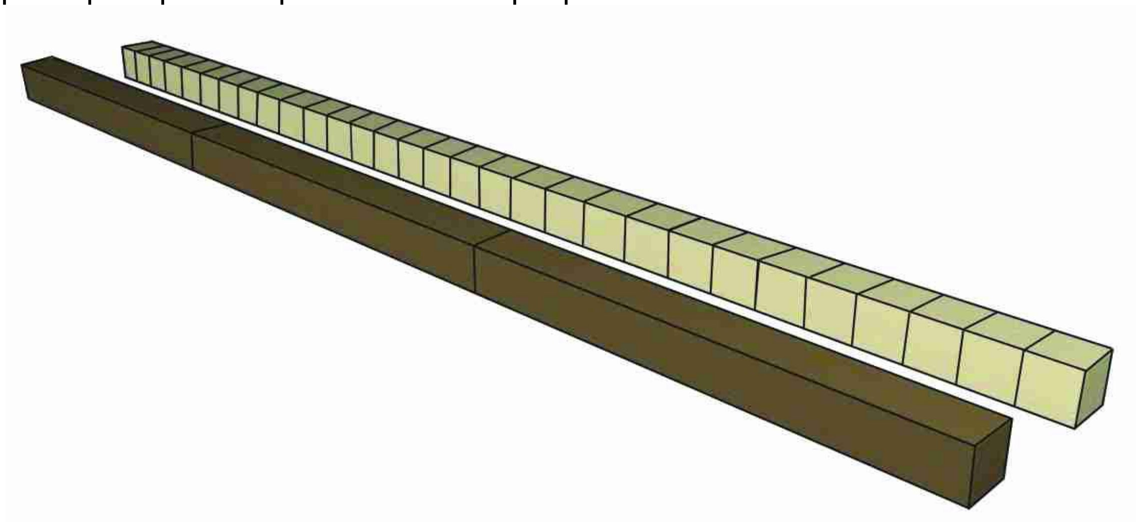
A cada pareja os doy un número, y vosotros tenéis que encontrar tantos productos diferentes como podáis que tengan el mismo valor que este número.
A vosotros os doy el 30, a vosotros el 18..................

Los productos que han encontrado en el caso del 30 son, por ejemplo, éstos:

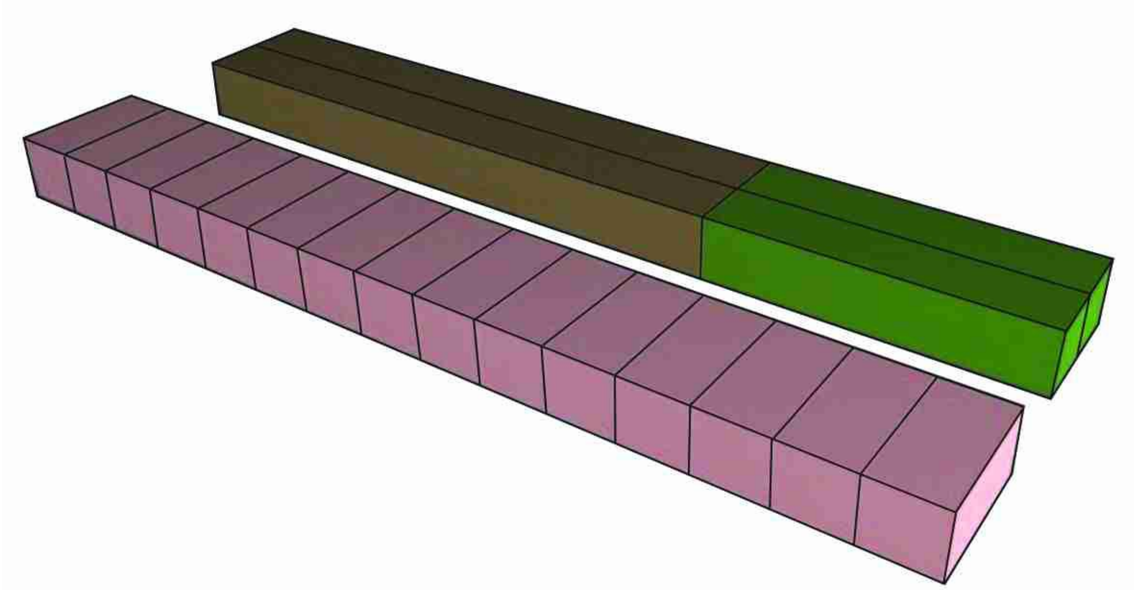


Nos los enseñan y los nombran todos correctamente*; " tres por diez*"... etc. ...

Nuestro papel es pedir que se fijen bien en si falta algún producto. Normalmente se olvidan de los siguientes: 30 X 1 y 1 X 30, puesto que son demasiado evidentes. De todas formas es importante que los añadan a los que ya tienen, y que sepan que siempre los tendrán que poner.



A menudo también se olvidan de los productos



Probablemente si no se acuerdan de éstos es porque se trata de números a los que la tabla de multiplicar no llega. Es muy importante que se exijan puesto que hemos pedido **todos los productos posibles.**

Ahora que ya los tenemos todos, vamos a proponer que los comparen entre ellos y que encuentren los que son iguales, o sea, lo que tienen la misma forma.
Cuando tienen dos de iguales, o antes, para ayudarse en ver si coinciden, los sitúan el uno sobre el otro. Es una afirmación de aquella propiedad de la multiplicación que ya hemos aprendido.
Se les puede invitar a explicar por escrito (como una carta a un amigo) lo que sucede.
Hay niños que dicen *“eso pasa siempre con todos los productos”.*
Es una buena afirmación, con un espíritu de generalizar una propiedad, pero no es completamente cierta, y justamente eso nos servirá de punto de partida para la

2ª parte

Repitamos exactamente lo mismo partiendo de otros números, entre los que haya algunos como por ejemplo éstos:

6 25 4 36 49

y si los alumnos saben ya la tabla hasta el 10 y son de 4º curso podemos poner el 64, el 81... y hasta el 144.

Tomamos por ejemplo el 36. Seguramente obtendremos de entrada los productos

1 X 36 36 X 1 6 X 6 9 X 4 y 4 X 9

Esforzándonos un poco obtendremos 2 X 18 18 X 2 3 X 12 y 12 X 3

Llegado el momento de aparear los que tienen la misma forma, lo harán correctamente, y les quedará el 6 X 6 que no puede ir con ningún otro.

En este momento se reafirma aquello que ya descubrimos cuando construimos la tabla de multiplicar y es una ocasión para volver a hablar de los productos de dos factores iguales, que....
... Son especiales y .tienen un nombre especial... ¿Lo recordáis?

De ahora en adelante cuando queramos representar un producto de éstos, o sea un cuadrado con las regletas, ya no cogeremos nunca todas las regletas del mismo número (por ejemplo las seis regletas lila) sino que ya cogeremos directamente el cuadrado (por ejemplo el cuadrado del 6, o cuadrado lila).

¡A partir de aquí habrá que cumplirlo!

Es necesario hacer notar, que a pesar de este final bonito, la cosa más importante de esta actividad es la riqueza de cálculo que significa el saber descomponer un número en dos factores de muchas maneras posibles.
Más tarde (actividad) se ampliará con otras descomposiciones.
Las descomposiciones de números en sumas son relativamente fáciles y a menudo las proponemos en clase. Pero no podemos olvidar las descomposiciones en factores si queremos llegar al objetivo de **conocer muchos aspectos de un mismo número.**

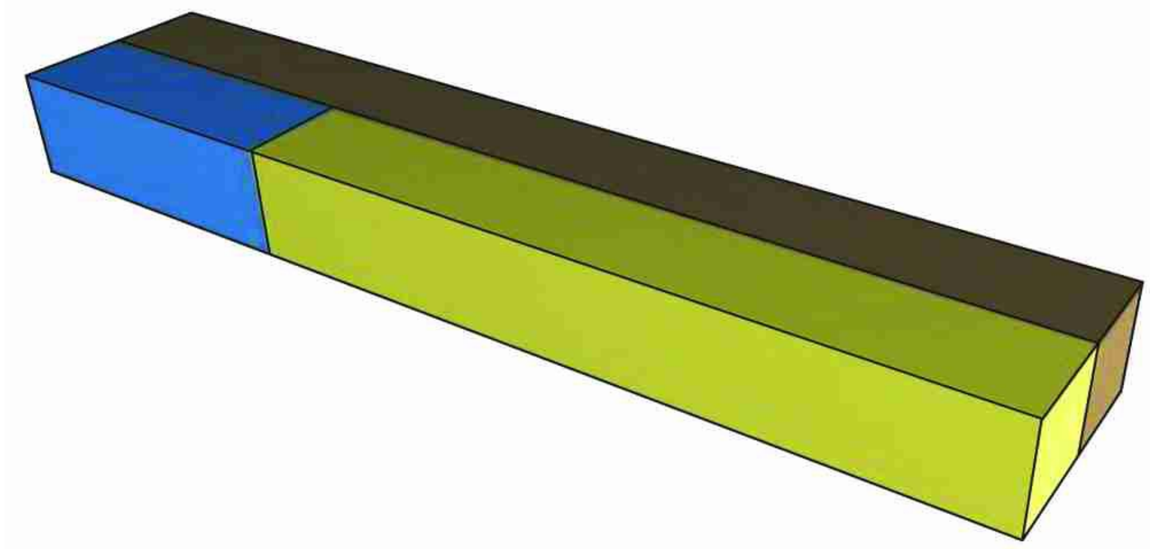
Ejemplo 5. Dos maneras de multiplicar un número por una suma

37. Multiplicar un número por una suma, haciéndolo de dos maneras: primero hacer la suma y después multiplicar, o sumar después de hacer los dos productos. Comparar los resultados.	Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

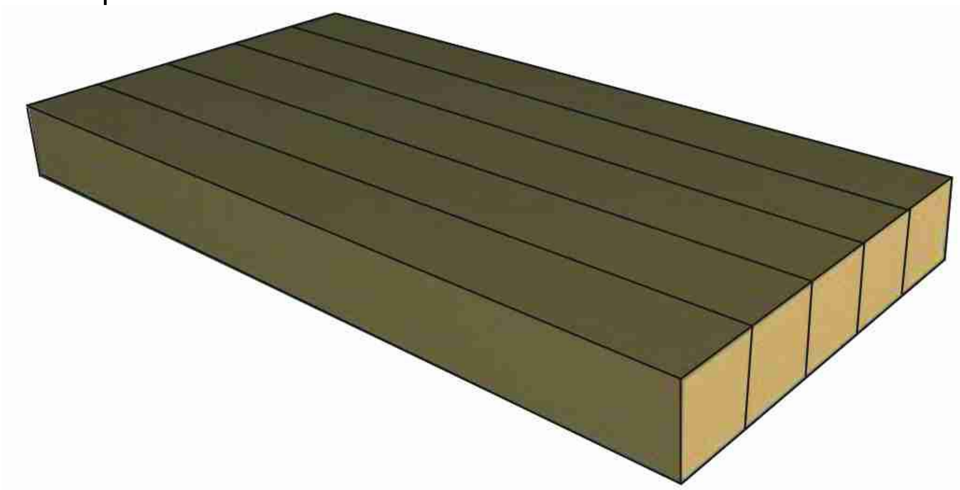
Suponemos que se trata de multiplicar el número 5 por la suma de 3 + 7

El resultado de realizar la primera de las maneras propuestas será:

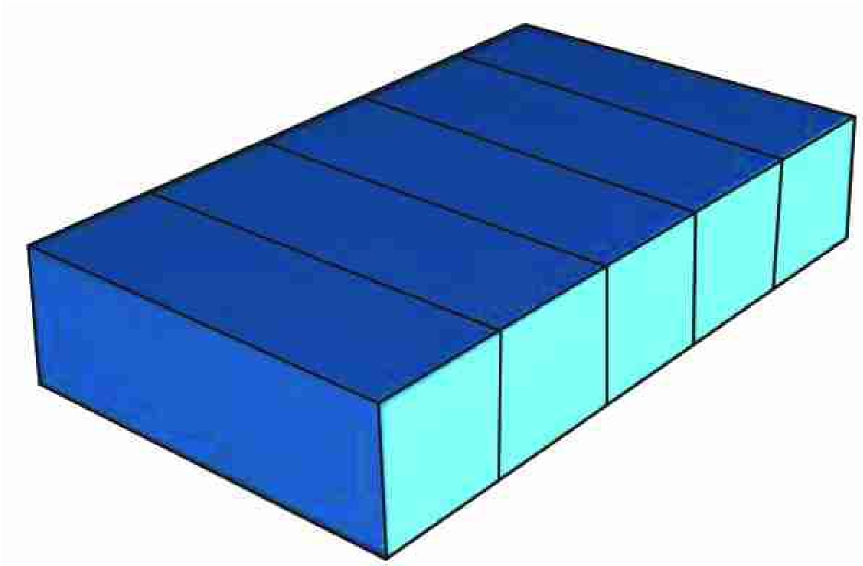
Primero hacemos la suma



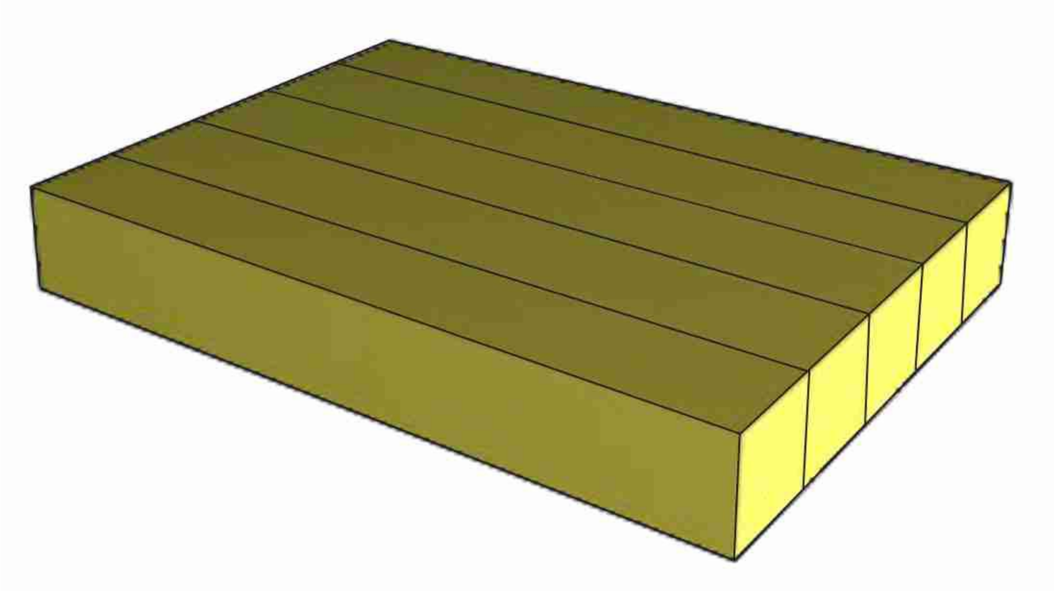
Después multiplicamos 10 X 5



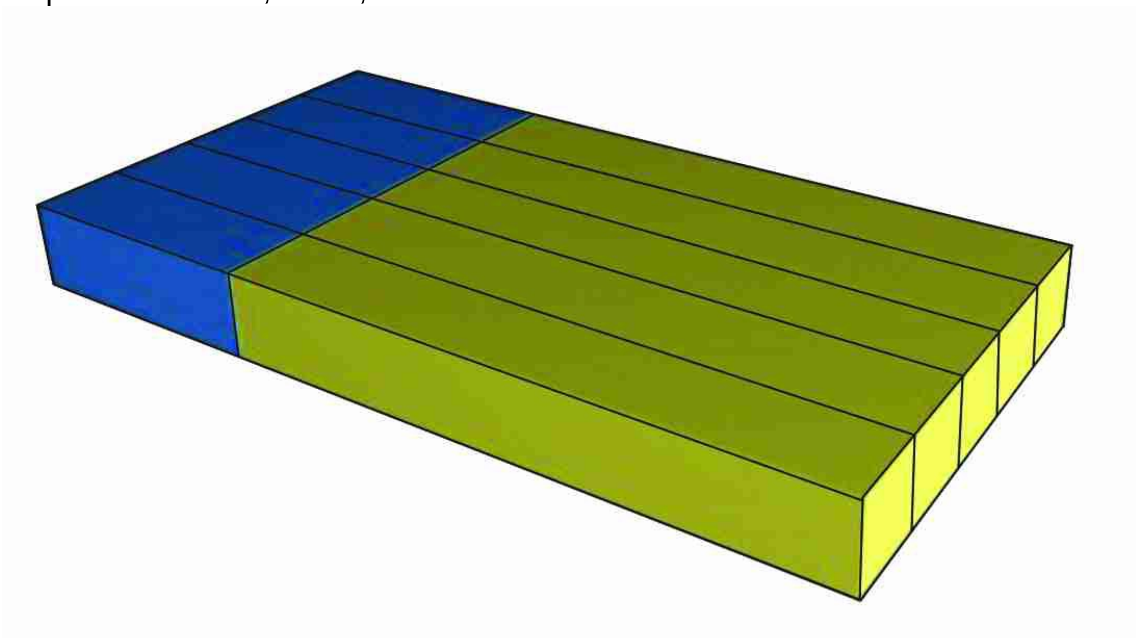
El resultado de realizarlo de la segunda manera será:
Multiplicamos 3 X 5



Y aparte, 7 x 5



Después sumamos, o sea, unimos los dos resultados



Se trata simplemente de comprobar si los dos resultados son iguales o diferentes.

Ejemplo 6.   ¿Por qué hacemos restas “llevando”?

48. Buscar la explicación de hechos que pueden aparecer a la hora de calcular con calculadora o por escrito y que parecen inexplicables. En particular, encontrar la explicación de una resta “llevando” hecha con calculadora.	Razonamiento lógico utilizado en la comprensión de fenómenos y en la investigación de la verdad. Valoración del papel del material como herramienta de comprensión, y de la calculadora como motivación.

El maestro organiza la clase por grupos y propone a los alumnos:

Cada grupo debe coger la calculadora y hacer la resta que escribo en la pizarra 5 8 2
- 3 4 8

Evidentemente ellos comentan que es facilísimo y la hacen. Les da 2 3 4

Entonces el maestro o maestra intenta crear un interrogante para despertar el interés de los niños y niñas sobre algo que sucede en la columna de las decenas.

-¡*Chicos! Yo no entiendo qué pasa! ¿No habíamos quedado en que las unidades se restaban de las unidades, las decenas de las decenas, y las centenas de las centenas? ...¡SI !*

Pues, fijaos en la columna del medio. Dice:
8 de arriba, sacamos 4 y abajo no quedan 4 ¡sino que quedan 3!

Se piden posibles explicaciones... Se repite la operación....
Tal vez las calculadoras se han estropeado... etc..

Todo eso ha sido sólo una preparación del tema, para suplir la falta de interés que los niños de esta edad tiene hacia el hecho que las maestras dicen que hay otras restas muy difíciles y molestas....Ellos no ven problema alguno y nosotros se lo hacemos. Hoy intentamos despertar su interés porque creemos que:
No hay nada peor que intentar explicar a los alumnos una cosa por la que no sienten ninguna curiosidad.

Ahora empieza el verdadero trabajo, para el que son necesarias las regletas:

Ahora, vuestro trabajo de hoy, es coger las regletas y todo cuanto creéis que os puede servir, y cada grupo debe investigar por qué sucede eso tan extraño. Debéis hacer la cantidad con el material, elegir lo que la resta nos indica, y sobre todo pensarlo muy bien.

A ver si algún grupo descubre por qué en vez de 4 decenas quedan sólo 3.

La actividad que sigue, debe ser totalmente libre, y después el maestro tendrá que conducir una buena recogida de resultados.

Algunas veces los niños y niñas han dado respuestas como éstas:

- *Nosotros pensamos que eso que pasa no es culpa de las decenas, sino de las unidades*
- *Nosotros hemos probado con otra resta parecida y pasa lo mismo.*
- *Nosotros lo hemos hecho con material y hemos tenido que hacer muchos cambios de decenas y unidades, pero sabemos seguro de que está bien.....*

Esta actividad, no pretende enseñar la mecánica de la resta llevando (que también puede hacerse con las regletas). Sólo pretende preparar el camino, para que el día que llegue sea recibida con un poco de interés.

Mientras tanto, los niños y niñas de nuestra clase habrán pasado un buen rato, probando de resolver un misterio, buscando estrategias, pensando, deduciendo, sacando conclusiones.

Ejemplo 7. Multiplicar por 10, por 20, por 30....... ¡y por todo!

52. Hacer un número (unidades y decenas) 10 o 100 veces mayor, sólo cambiando las unidades de un orden por otros del orden siguiente, o de dos órdenes más allá. **53.** Multiplicar un número (con unidades y decenas) por 20, 30, etc.., multiplicándolo por 2,3...etc.. y después por 10.	Consolidación del valor posicional de las cifras, del sistema decimal y de la noción de multiplicación. Aplicación de la propiedad asociativa para preparar la práctica de multiplicaciones escritas, con números de dos cifras.

1ª parte

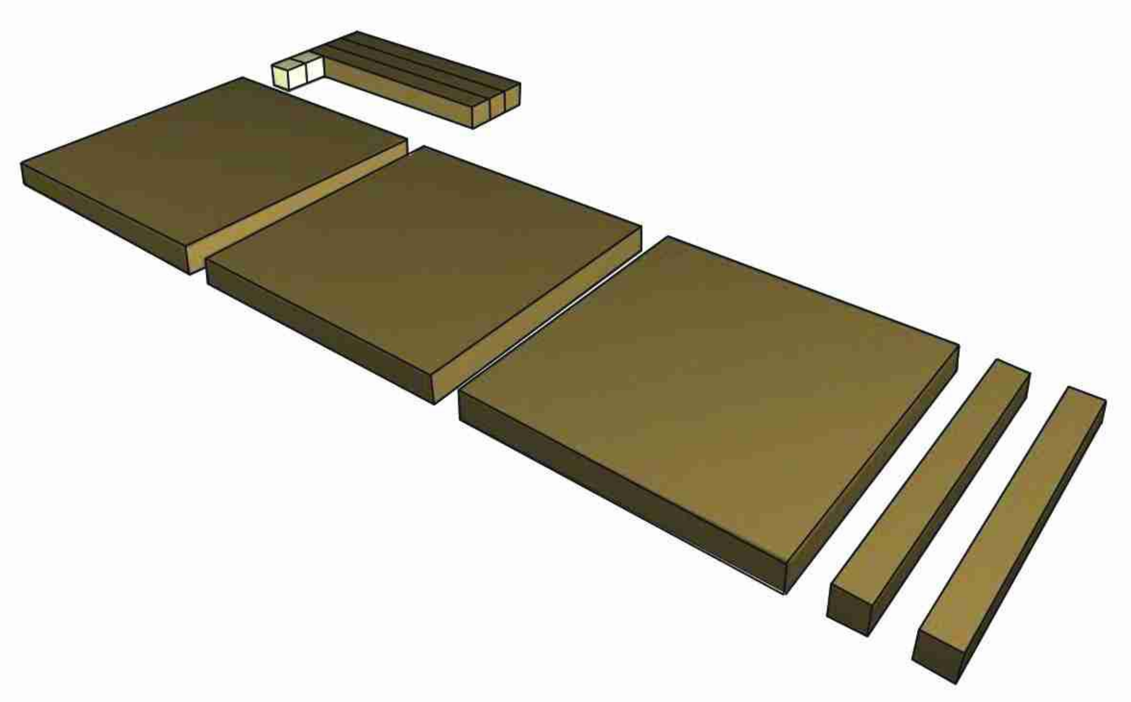
El maestro propone a los alumnos:

Coged el material y un número, por ejemplo ***el 32***

Si a continuación de las tres decenas cogen la regleta del 2 (o sea la rosa), les sugerimos que la cambien por dos unidades. De esta forma, tenemos 3 decenas y 2 unidades.
Ahora queremos multiplicarlo por 10, o sea ***hacerlo diez veces mayor****, pero de una forma muy sencilla, sin tener que coger tantas decenas.*
Podemos pensar hacer diez veces mayor cada una de las partes que forman el número, o sea, cada una de las decenas, y cada una de las unidades.

Se tratará de descubrir que justamente, debido a “aquello que ya sabemos” (que los diferentes órdenes de unidades crecen de diez en diez),
- cuando una decena la hacemos diez veces mayor se convierte en una centena
- cuando una unidad la hacemos diez veces mayor se convierte en una decena.

Por eso, obtenemos directamente nuestro resultado. Podemos expresarlo así y escribir la multiplicación en un papel de este modo:



32 X 10 = 320

Después trabajaremos con otros ejemplos parecidos.
Es importante que los alumnos lleguen a la conclusión:

Para multiplicar un número por 10 sólo es preciso añadirle un cero.

¿Y si ahora quisiésemos hacer el 32 ***cien veces mayor****?*

Si han entendido bien la primera parte, ellos mismos encontrarán la solución de cambiar las unidades por centenas y las decenas por miles, y deducirán la norma práctica.

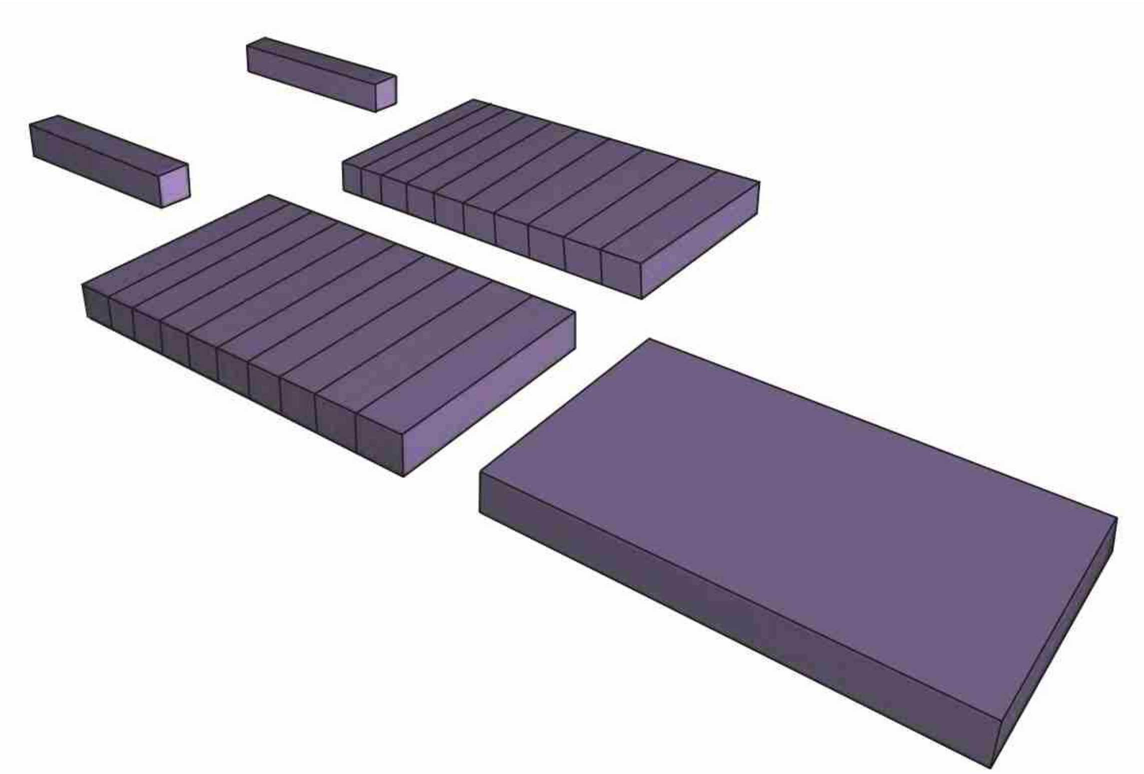
2ª parte

Anteriormente ya hemos practicado que a veces para dividir por un número podemos hacerlo con dos divisiones seguidas. Por ejemplo, es igual dividir directamente por 15, que dividir por 5 y por 3. Si eso no hubiese sido asumido, habría necesidad de trabajarlo antes de la actividad actual.
Los niños y niñas saben también que este sistema a menudo resulta más cómodo, sobre todo cuando hacemos cálculo mental. Ahora lo aplicaremos al cálculo escrito.

Hacemos con el material una multiplicación tan sencilla como 6 X 10 y obtenemos el 60

Ahora pensad cómo podríamos hacer de forma muy fácil ***6 X 20.***
Intentad hacerla en dos partes.

Fácilmente encuentran la solución: Podemos expresar así lo que hemos hecho:



A continuación, como tenemos demasiado decenas, cambiaremos el diez por una centena.

Es muy importante que los niños y niñas lleguen a expresar verbalmente lo que han hecho paso por paso y que lleguen a formular la conclusión que podemos sacar:

Para multiplicar un número por 20 es más fácil multiplicarlo primero por 2 y después por 10. Lo mismo pasaría para multiplicar un número por 30, o por....90.

Después podrán pasar a esta primera expresión escrita: 6 X 20 = 6 X 2 X 10
y a continuación 6 X 20 = 120.
Se puede completar con ejercicios de cálculo mental de aplicación directa de lo mismo.

Este trabajo es importante antes de presentar el algoritmo de la multiplicación escrita. En efecto, conviene hacer estos pasos despacio y con toda la comprensión que proporciona el material, puesto que para los alumnos son imprescindibles para comprender bien lo que están haciendo por escrito, y sin esta comprensión el algoritmo estaría vacío de significado.

Ejemplo 8. Las divisiones escritas

63. Representar con el material algunas divisiones de números más grandes que 100 por números más pequeños, construyendo un rectángulo que tenga un lado del tamaño del divisor. Constatar que el cociente es el mismo que si lo hiciésemos repartiendo.	Significado real de la división como operación inversa a la multiplicación.
64. En la actividad anterior, reconocer el residuo, si es el caso, y buscarlo de dos maneras: la cantidad que sobra, o la que faltaría para que el cociente sea una unidad mayor.	Reconocimiento de la división entera y su propiedad fundamental. Cociente por defecto y por exceso y sus propiedades. Condición que debe cumplir el residuo.

Los alumnos ya han trabajado, en anteriores cursos, las dos maneras de hacer divisiones: repartiendo, o construyendo un rectángulo del que se conoce un lado.
Ahora lo volvemos a hacer con números más grandes y ponemos el acento en algunas ventajas de la última forma citada.

El maestro propone:

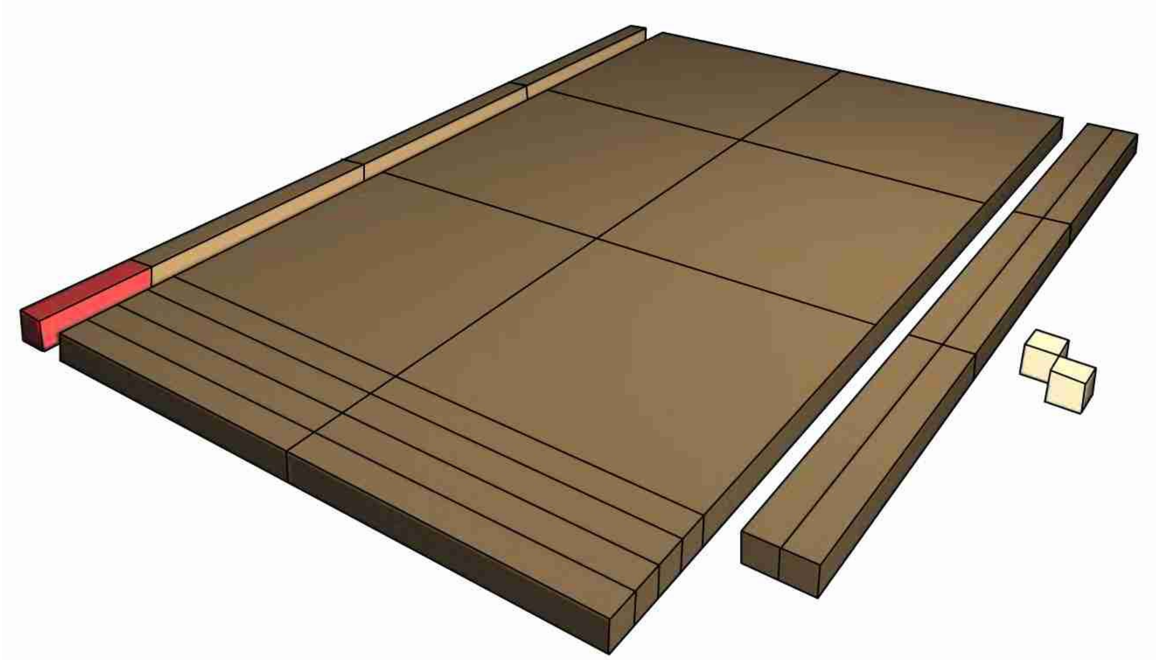
Se trata de ver como podríamos hacer ***742 : 34.***

Coged las regletas que corresponden al número 742.
Realmente hacer 34 pilas de unidades resultaría bastante incómodo, por lo tanto intentad de hacerlo con un rectángulo.

1ª parte

Al principio esta actividad estará bastante guiada por el maestro.

Primero pondremos el “divisor”, que es 34, hecho con 3 decenas y 4 unidades, en una columna al lado, sólo para servirnos de guía, puesto que nos indica la longitud de un lado de nuestro rectángulo.
Ahora se trata de poner todas las piezas que forman 742 en columnas como la que nos hace de guía.
Empezaremos situando las 7 centenas; nos quedarán así y nos va a sobrar una.



Ésta que nos sobra tenemos que cambiarla por 10 decenas, y de esta forma, tendremos 14 decenas (10 de la centena que hemos cambiado y 4 que ya tenía en número) a punto de ponerlas en columnas verticales. Conviene que los alumnos practiquen para explicarlo. Probablemente nosotros tendremos que volver a intervenir.

Antes de continuar, debemos llenar el espacio que tenemos junto al 4. Al poner decenas (horizontales) vemos que necesitemos 4 abajo de cada centena, o sea, en total 8. Ahora no quedan 6 decenas.

Para repartir éstas 6 decenas en columnas de 3 decenas, parece ser que podremos hacer dos columnas.

Lo probamos, pero entonces descubrimos que para completar el rectángulo que nos ha quedado en la esquina inferior, necesitamos exactamente 8 unidades y en nuestro número sólo tenemos dos.

Ante este obstáculo tenemos que permanecer en silencio y dejar que los niños y niñas busquen soluciones. Nosotros sólo debemos hacernos fuertes ante la idea de que si el rectángulo no está bien completo, no es una auténtica división.

Probablemente habrá quién se decidirá a suprimir la segunda columna de decenas, y entonces nos quedarán 32 unidades.
El rectángulo de la esquina se habrá reducido a 4 unidades. Las ponemos (naturalmente después de cambiar una decena, lo cual siempre tenemos que estar a punto de hacer).

¡Ahora tenemos un rectángulo completo! Y en la mano tenemos   32 – 4 = 28 unidades.

También es posible, y deseable, que alguien tal vez más atrevido diga que por pocas unidades que nos faltaban para completar nuestra primera formación (¡en total nos faltaban 6!) podríamos pedir un préstamo de 6. Lo hacemos así y nos queda un rectángulo un poco mayor, y una deuda de 6 unidades. También es válido.

Llegados aquí, es el momento de observar nuestra figura y sacar conclusiones, es el momento en que nosotros debemos potenciar el diálogo.

- ***Mirad bien lo que hemos hecho con las regletas y procurad responder con precisión.***

- *Fijaos que al empezar teníamos la división 742 : 34*

- *¿Dónde está el dividendo? ¿Dónde lo vemos?* Respuesta: ... *"Es toda la cantidad".*
  (es necesario recalcar que no olviden incluir el residuo)

- *Señalad la longitud que representa* ***el divisor****...* Respuesta: "*es el 34 que tenemos aquí"*

- *¿De cuántas maneras hemos podido hacer la división?..* Respuesta ... *de dos maneras*

- *Ahora señalad* ***el cociente,*** *o sea el resultado que hemos encontrado en cada una de estas maneras u opciones. Leedlo. ¿Cuánto vale?*
  ¡Eso ya cuesta más! *....* Pasando el dedo debemos interpretar la longitud del otro lado del rectángulo que hemos construido. Algunos no lo ven y debemos ayudarles.
  Por fin algunos dicen 22 y otros 21. Y todos tienen razón. Entonces podemos hablar del residuo y destacar su importancia.

- *No sería correcto decir que el cociente de dividir 742 por 34 es sólo 21, ni sólo 22.*
  Habrá que decir que el cociente o resultado de nuestra división es 21 y sobran 28, o bien que es 22 y faltan 6. Ambas respuestas son verdad.

Por lo tanto, hemos llegado a un hecho importante: Una división que no es exacta, nos puede dar dos cocientes diferentes:
Uno, cuando sobran unidades, **que se llama cociente por defecto.**
Otro, cuando faltan unidad, es **que se llama cociente por exceso**

2ª parte

A partir de este momento comienza la 2ª parte de la actividad (que si es necesario puede realizarse al día siguiente), que es como una pequeña investigación para que los alumnos lleguen a descubrir cosas, y que nosotros iremos completando con el vocabulario matemático que corresponde a cada una de les nociones.
Hacemos, para nosotros, una pequeña lista de cosas a descubrir:

- Si cogemos la primera opción, (cociente por defecto) vemos que el residuo es muy grande, es mayor que el cociente ... (Algunos niños pensaban que no podía ser)
- Lo que sí es seguro es que **siempre el residuo es más pequeño que el divisor.**
- Y si cogemos la otra (cociente por exceso) **también es más pequeño que el divisor.**

- *Ahora sumad los dos residuos (o sea el 6 y el 28) y observad qué sucede.*
  Pueden hacerlo con otras divisiones inventadas por ellos, por ejemplo con calculadora, y constatarlo.

- **¡Siempre la suma de los dos residuos es igual al divisor!**

Estas divisiones con números naturales, que no dan un resultado exacto se llaman **divisiones enteras.**

3aparte

87. Repetir la experiencia de la actividad 63 detallando los diferentes pasos de la resolución de una división y, a medida que lo hacemos, escribir en un papel los resultados parciales obtenidos.	Razonamiento lógico aplicado a la resolución de la división y descubrimiento personal del algoritmo de esta operación.

Escritura numérica de todos los pasos realizados al hacer la división con las regletas. Los alumnos pueden llenar fácilmente estos cuadros si tienen delante el material y no hacen nada más que anotar lo que acabemos de hacer y de comentar verbalmente.

Repartimos las **centenas** entre las 3 decenas	Las que sobran las pasamos a decenas	Decenas que tenemos en total	Para acabar el rectángulo tenemos que gastar........
7 : 3 = 2 de una decena de largo, vale.............................**20** y sobra 1 centena	1 cent. = 10 des.	10 + 4 = 14	2 X 4 = 8 8 filas de decenas 1 4 – 8 = 6 Nos quedan **6 decenas**
Repartimos las **decenas**	Las que sobran las pasamos a unidades	Unidades que tenemos en total	Para acabar el rectángulo tenemos que gastar........
6 : 3 = ...**1** y sobran...3 decenas	2 dec. = 30 unidades	30 + 2 = 32	Una fila de 4 32 – 4 = 28 Nos quedan **28 unidades**

Para saber el cociente tenemos que sumar los dos cocientes parciales: 20 + 1 = **21**
El residuo es el número de unidades que nos han quedado al final, o sea **28.**

El algoritmo de la división escrita no es más que una manera reducida y práctica de escribir todo eso.

Ejemplo 9. Comparar cuadrados y cubos.

68. Comparar el cuadrado de un número con el de otro número que sea doble, triple...de aquél. Predecir cuantas veces el cuadrado pequeño cabrá en el grande, y después comprobarlo.	Comprensión del hecho que la razón entre los cuadrados de dos números es precisamente el cuadrado de la razón entre los dos números.
73. Comparar el cubo de un número con el de otro número que sea doble, triple...de aquél. Predecir cuantas veces el cubo pequeño cabrá en el grande, y después comprobarlo.	Descubrimiento de que la relación entre los cubos de dos números no coincide con la relación entre los números ni con la relación entre sus cuadrados.

Ésta es una de les actividades que causa mayor sorpresa a los niños y niñas las primeras veces de hacerla. Probablemente eso es debido al hecho que, con respecto a las relaciones existentes entre los números y sus cuadrados, casi todo el mundo tiene un prejuicio falso.
Precisamente en los temas en los que eso sucede es cuando es más interesante que los alumnos lo trabajen con el material y vean con sus propios ojos que lo que sucede contradice lo que ellos mismos previamente pensaban.

1ª parte.

El maestro propone:

Coged con regletas dos números, que sean uno el doble del otro.
Unos cogen el 6 y el 3, otros el 10 y el 5, o el 8 y el 4, etc... Si alguien coge el 12 (hecho con el 10 y el 2) y el 6, está muy bien.

Ya sabéis que el 3 en el 6 cabe dos veces, ¿verdad?
Pues bien, sin hacer nada aún, decid cuántas veces creéis que el cuadrado del 3 cabrá en el cuadrado del 6.

Dejamos que salgan todas las opiniones, y después decimos:

Ahora, ¡comprobadlo!

Normalmente siempre los hay que quedan sorprendidos del hecho que el cuadrado grande no sea también el doble del cuadrado pequeño.

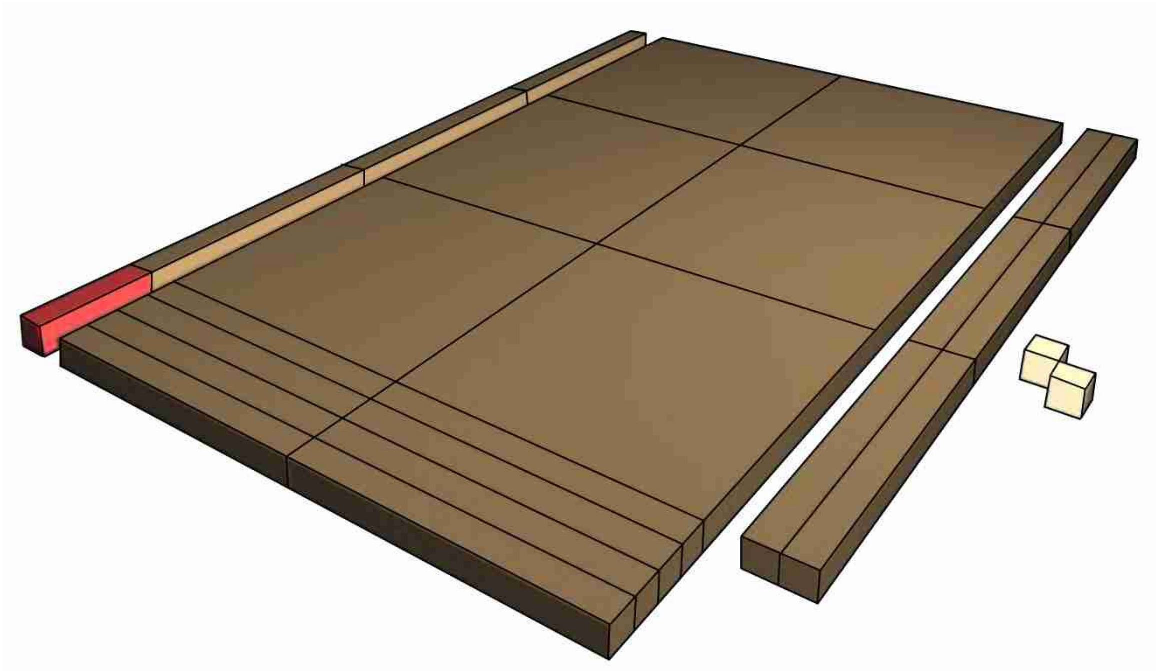
Finalmente es necesario que los chicos y chicas expresen correctamente lo que han hecho y visto, y que lleguen a formularlo ellos mismos así:

Si un número es el doble de otro, su cuadrado no es el doble del otro cuadrado, sino que es cuatro veces más.

Ahora cogéis dos números que sean uno el ***triple*** *del otro, por ejemplo el 6 y el 2.*
Antes de hacerlo, pensad cuantas veces el cuadrado del 2 cabrá en el cuadrado del 6 y escribidlo en un papel. Después comprobadlo.

Esta vez hay muchas menos respuestas acertadas que antes
Se quedan muy sorprendidos viendo que cabe no 4 ni 6 veces, ¡sino 9!

Es necesario repetir la experiencia con otras parejas de números y también con un número cuádruple, o quíntuplo del otro....
Es interesante el caso del 10 y el 2, en el cual el punto de partida es que el 10 es cinco veces el 2, y encontramos que en el cuadrado del 10 ¡caben 25 cuadrados del dos!



De este modo, llega a ser normal el caso del 10 y su cuadrado (que coincide con el dm^2) relacionado con el 1 y su cuadrado. Resulta evidente que el dm^2 tenga no 10 cm^2 como espontáneamente esperábamos sino 100 cm^2.

89. Comparar los cuadrados de dos números, uno de los cuales es múltiple del otro, y observar la relación que hay entre los dos cuadrados, realizándolo con el material, y expresándolo verbalmente y por escrito.	Descubrimiento de que la relación entre los cuadrados de dos números es precisamente el cuadrado de la relación entre los números.

Al llegar a ESO, cuando por su edad los alumnos tienen ya un mayor grado de madurez, convendrá repetir toda la experiencia, pero llegando a la deducción y a la formulación de la ley general:

La relación entre dos cuadrados es precisamente el cuadrado de la relación entre los dos números.

2ª parte

La actividad se realiza exactamente al igual que con los cuadrados. La única diferencia es que ahora el descubrimiento es aún más sorprendente. Los chicos y chicas constatan cosas como por ejemplo ésta:

“para hacer el cubo de 10 con cubos de 2 se necesitan muchísimos, ¡se necesitan 125 !”

Descubrimientos como éste son importantísimos antes de tener que asumir (de buen grado o por fuerza) que un dm^3 equivale a 1000 cm^3.

Finalmente, aquéllos que tengan más despierta la capacidad de generalizar conceptos, sobre todo si se encuentran ya en Secundaria, tal vez llegarán a la formulación de la ley general en el caso de los cubos, o sea, a la expresión del hecho que la relación entre los cubos de dos números es precisamente igual al cubo de la relación entre los números.

Aunque no lleguen a formularlo como nosotros, veremos si lo han entendido o no, proponiéndoles la resolución de cuestiones numéricas como ésta:

- El triple de 125 es 375. Sin calcular ni 125 al cuadrado ni 375 al cuadrado, ¿podríais decirme cuantas veces el cuadrado de 125 cabe en el cuadrado de 375?

Ejemplo 10. Como crecen los cuadrados y como hacemos la raíz cuadrada

91. Buscar qué regletas debemos añadir al cuadrado de un número para que llegue a igualar el del número siguiente. Repetirlo en diversos casos y encontrar la norma.	Mayor conocimiento de los cuadrados y de su crecimiento. Descubrimiento de una ley general, en un caso poco utilitario, por el placer de investigar.
92. Dada una cantidad (primero menor que 100, y después mayor) ponerla con el material en forma de cuadrado. Ver y anotar cuál es el lado del cuadrado y constatar el número de unidades que sobran. Escribir una igualdad que exprese lo qué hemos hecho.	Noción de raíz cuadrada como operación inversa al cuadrado (sin pasar al algoritmo). Signo de la raíz cuadrada. Número de cifras del número concreto y del resultado. Valor máximo del residuo, en relación a la actividad 91.

En la actividad 67 ya habíamos encontrado la ocasión de observar que, por una parte los números naturales, y por su parte sus cuadrados, tienen un crecimiento muy diferente. Pero aunque no hubiésemos hecho aquella actividad, también podríamos ahora descubrirlo de nuevo.

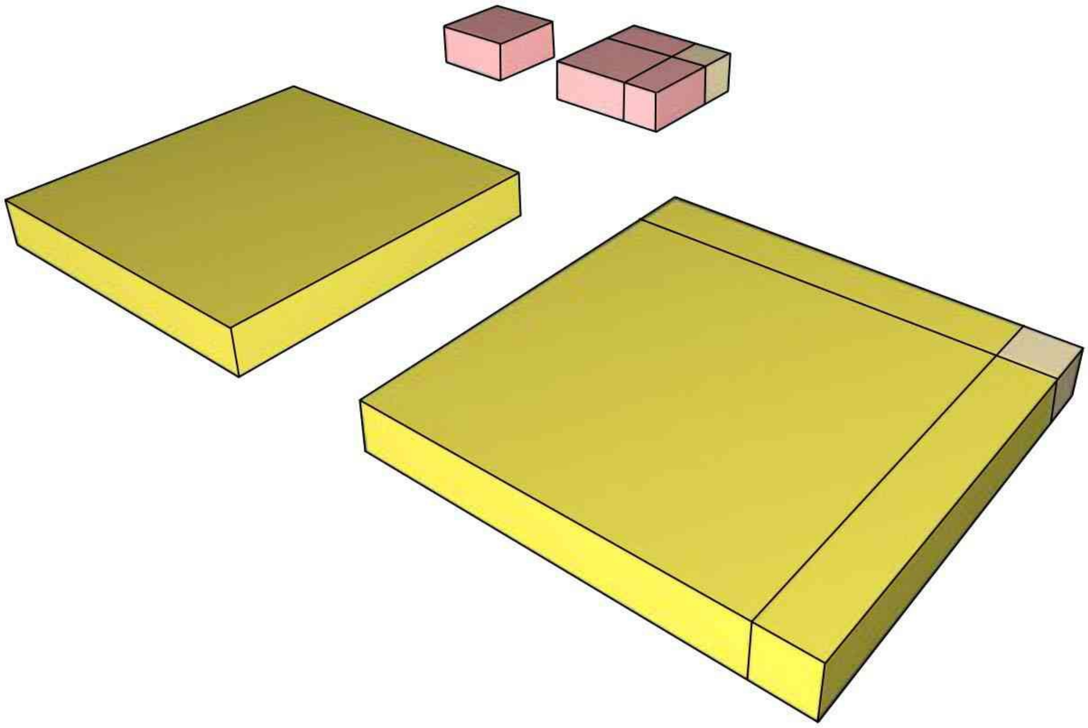
1ª parte

El maestro propone:

Coged los cuadrados de dos números seguidos (por ejemplo el 2 y el 3) y buscad qué regletas le faltan al más pequeño para llegar a igualar el mayor.

Repetid la experiencia con otros dos cuadrados de números seguidos, que sean bastante diferentes de los anteriores.

Cada cual tendrá delante dos configuraciones como éstas:



A ver si ahora sabéis explicar qué sucede.

A menudo es bueno pedirles que lo escriban en un papel con una o más frases. Lo que interesa no es que escriban qué sucede con el cuadrado del 2 o con el del 7, como hacíamos a los ciclos medio o superior, sino que a esta edad, lo que interesa es que, después de haber experimentado con varios casos concretos, lleguen ya a formular una conclusión o ley general. En tal caso sería, por ejemplo:

"Al cuadrado de cualquier número, para llegar al cuadrado del número siguiente, es necesario añadirle dos veces el número más una unidad "

(No hace falta decir que siempre hay varias formulaciones válidas, mientras sean correctas.)

Ahora, lo escribiremos con lenguaje matemático, para los primeros números:

22 = 12+ 2 X 1 + 1   32 = 22 + 2 X 2 + 1   42 = 32 + 2 X 3 + 1 ....

Podemos hacer una lista de las cantidades que debemos añadir a cada cuadrado para obtener el siguiente. Serán (incluido el paso del 02 al 12) : 1 , 3 , 5 , 7, 9 , 11, 13.....
O sea la serie de los números nones.

Ahora, conocemos de forma mucho más precisa la forma de crecer de los cuadrados, que no es según una cantidad fija, sino que es añadiendo cada vez una cantidad mayor, y siempre un número non.

Será bueno comprobar si esta curiosa propiedad de los cuadrados se ha entendido bien, planteando a los alumnos alguna pregunta como por ejemplo ésta:

Imaginad que tenemos el cuadrado del número 123. No podemos hacerlo con las regletas porque no tendríamos bastantes ni tendríamos suficiente lugar. Pero como ya sois mayores, podéis pensarlo aunque no los tengáis delante.

Si ahora quisiésemos pasar del cuadrado del 123 al del 124, ¿qué tendríamos que añadirle?.

Con cosas de este tipo se intenta pasar de la comprensión de casos concretos a la de propiedades generales, o sea, se intenta fomentar la capacidad de generalizar, propia de estas edades y muy necesaria para pasar al álgebra o simplemente a las primeras ecuaciones. Estas primeras generalizaciones deben consistir en un progreso personal de cada alumno, y es evidente que para que pueda realizarse es casi indispensable la previa contemplación de los fenómenos numéricos en realizaciones hechas con el material.

2ª parte

Se trata de dar a los alumnos una cantidad para que ellos la pongan en forma de cuadrado.

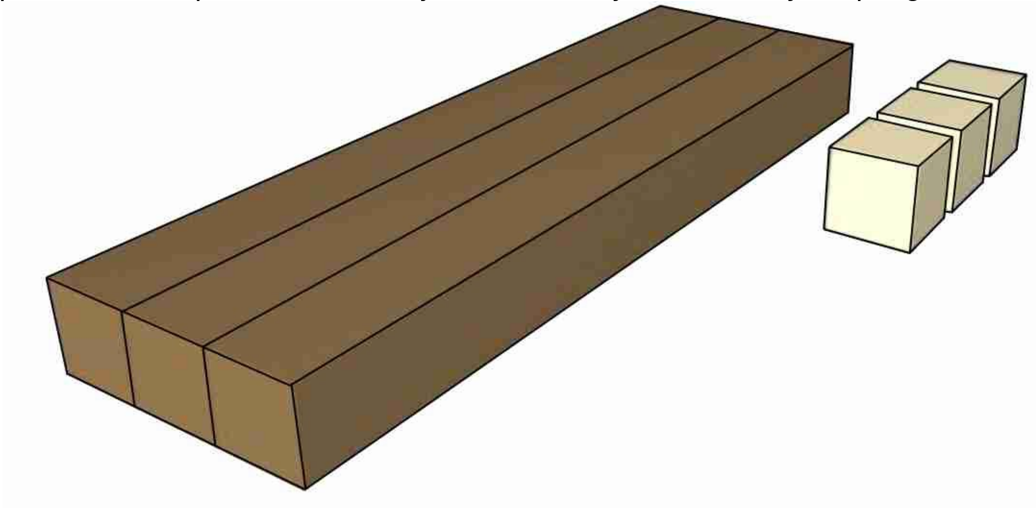
Una posible forma de trabajo sería organizarlos en pequeños grupos y poner en la pizarra un cuadro con éstos números

70	59	81	42	33	92	29	108

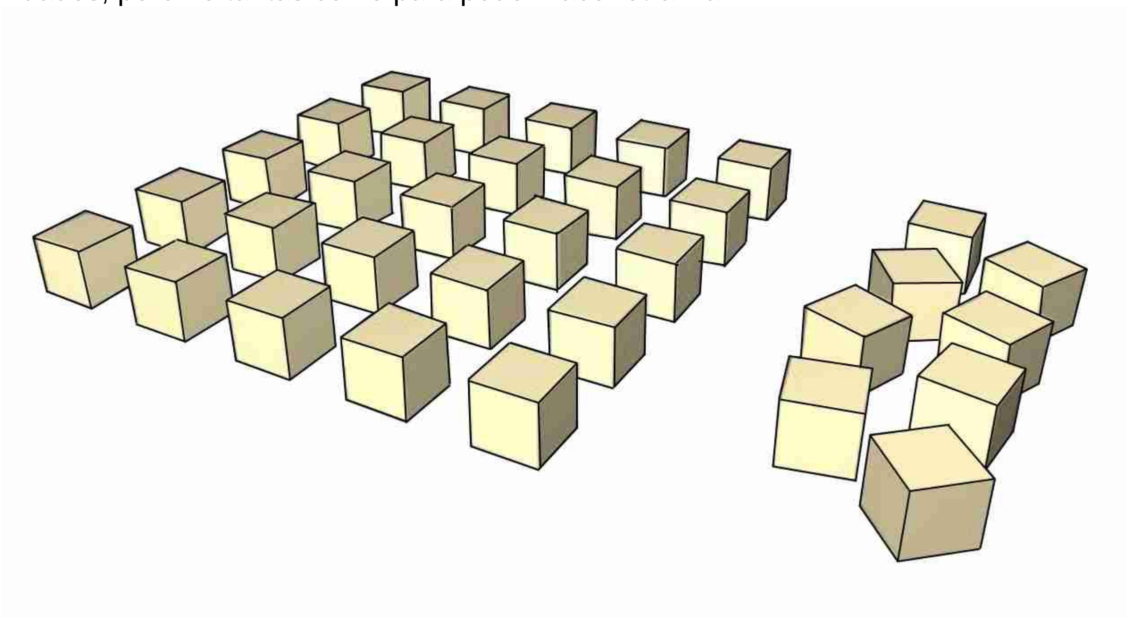
Cada grupo tiene que elegir un número de éstos y, con las regletas que crea más convenientes, poner el número en forma de cuadrado. Ya sabéis que un mismo número podemos hacerlo de muchas maneras diferentes; pues bien, antes de coger las regletas correspondientes al número, pensad de qué manera os puede ir mejor para que sea más fácil ponerlo en forma de cuadrado.

La opción que deben elegir, referente a la manera de formar el número con regletas, es la parte más interesante para la comprensión de la raíz cuadrada.
Para entenderlo, analicemos diferentes reacciones posibles suponiendo, por ejemplo, que se tratase del número 33.

Una posibilidad es que de entrada cojan 3 decenas y 3 unidades y las pongan así:

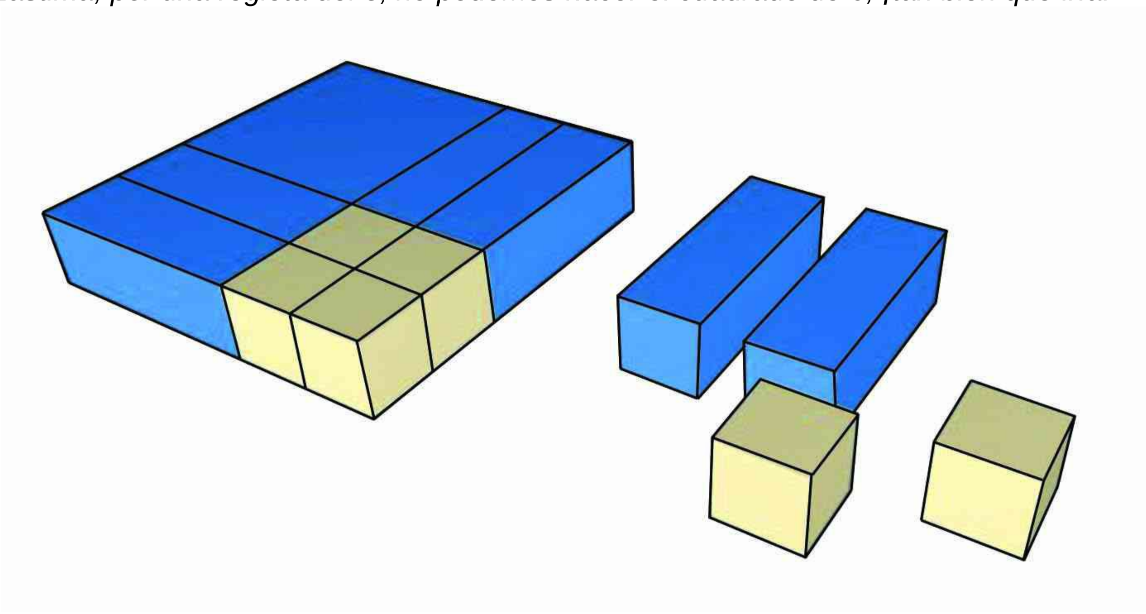


Hay niños que entonces piensan que para hacer el cuadrado les iría mejor tener las 33 unidades sueltas, y cambian sus decenas. Por este camino llegan a hacer varios ensayos de cómo colocarlas, y al final descubren que, con unidades sueltas, para construir un cuadrado se debe seguir este sistema de actuación (las flechas indican las etapas de la construcción), y entonces ven muy claro que a veces les sobran muchas unidades, pero no tantas como para poder hacer otra fila.



Otra posibilidad: cogen tres decenas y la regleta del 3, o sea la azul, y al ponerla sobre la mesa piensan que para hacer un cuadrado sería mejor que todas fuesen iguales. Entonces cambian las decenas por regletas del 3 y se encuentran que en total en disponen de once.
Alguien comenta que sería mejor si en vez de ser regletas fuesen cuadrados, y eso les decide a cambiarlas en este sentido.

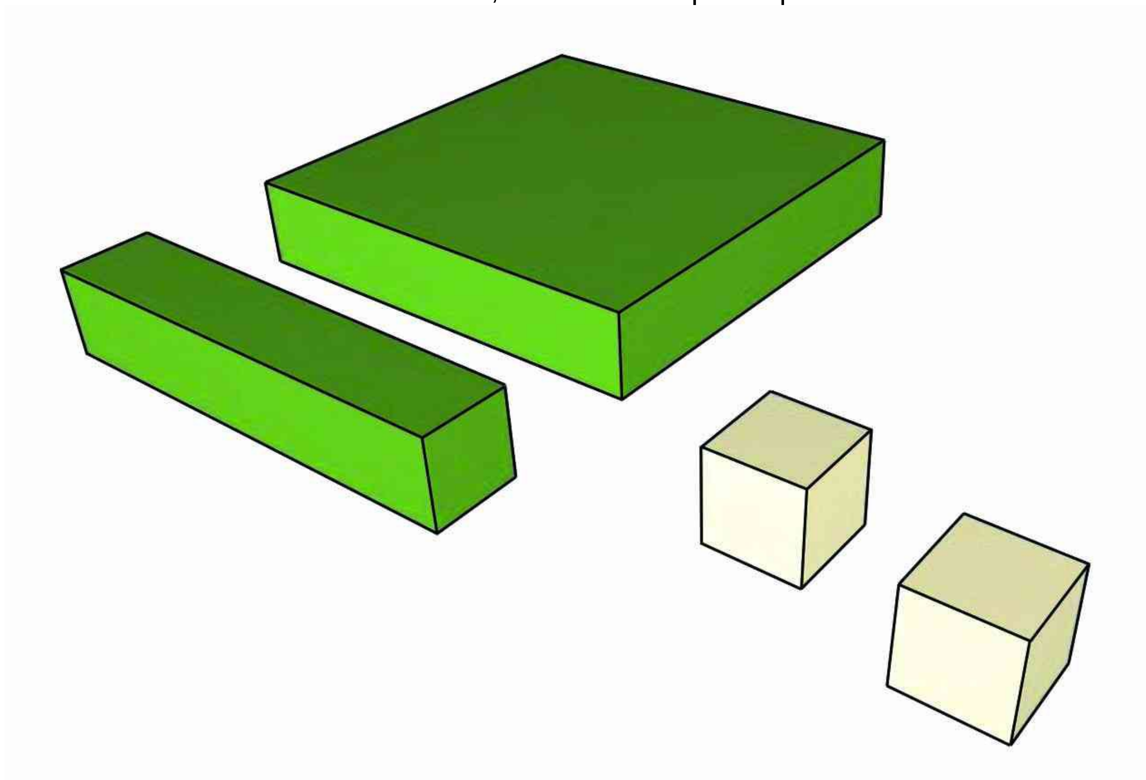
Piensan que podrán hacer un cuadrado poniendo dos de azules a cada lado, pero acto seguido constatan que no les llegan, Se oyen algunos comentarios, como por ejemplo:
Lástima, por una regleta del 3, no podemos hacer el cuadrado de 6, ¡tan bien que iría!



Entonces es momento importante de reconocer que deben coger como punto de partida un solo cuadrado azul; por lo tanto, los otros los tienen que volver a cambiar por regletas, y ponerlos a su alrededor, (igual que hemos indicado antes con las unidades). La construcción les obliga a cambiar dos regletas por unidades, para poder llenar el cuadro de la esquina.

Finalmente, es posible que con todo eso, y sobre todo a partir del hecho que todos vayan explicando a los otros lo que han hecho, descubrirán que el camino más fácil es sin duda coger primero el cuadrado mayor que cabe dentro del número, y después coger la parte que sobra con unidades o con regletas del mismo número, para ponerlas a los lados. Y siempre se deberá tener en cuenta que debe sobrar una unidad para llenar el cuadro de la esquina.

Todo eso, aplicado a nuestro caso del 33, indicaría la forma de actuar siguiente:
Pensar que en el 33 cabe el cuadrado de 5, porque ya sabemos que es 25 y nos sobran 8. Debemos coger, pues, el cuadrado verde de 5 y ocho unidades más.
Si con éstas intentamos hacer otra fila, constatamos que no podemos.



Después de cualquiera de las tres construcciones que hemos conseguido, pediremos a los alumnos que escriban en un papel la operación que han hecho.
Es el momento de informarles que ésta se llama **raíz cuadrada** y tiene un símbolo para representarla por escrito que es éste $\sqrt{\ }$

De esta forma hemos hecho $\sqrt{33}$ = 5 residuo 8

Después podríamos proponer a los alumnos la práctica de raíces cuadradas sencillas resueltas mentalmente. (Evidentemente eso requiere que previamente hayan memorizado los cuadrados de los primeros números).

Esta actividad con las regletas no tiene como objetivo que los alumnos aprendan el algoritmo de la raíz cuadrada, que normalmente siempre resolverán con calculadora, sino que comprendan en que consiste, para que cuando tengan que utilizarla en diferentes problemas de cálculo o de geometría, tenga para ellos algún significado.

Para acabar podemos añadirle una reflexión interesante sobre el residuo de la raíz cuadrada.

En el ejemplo que acabamos de hacer, la raíz nos ha salido 5 y el residuo nos ha salido 8.
A ver si alguien de vosotros, sabe explicar como es que el residuo puede ser mayor que el resultado de la raíz.

En efecto, eso probablemente es algo que sorprende a los que son observadores...
Para ayudarles habrá que recordar una actividad hecha anteriormente, la que nosotros hemos llamado 1ª parte. La conclusión es:

El residuo de la raíz cuadrada debe ser siempre más pequeño que dos veces la raíz más uno.

Ejemplo 11. El cuadrado de una suma.

95. Representar con regletas una suma muy sencilla, y después construir su cuadrado. A continuación intentar otra cosa: hacer el cuadrado de cada sumando y después sumarlos. Después de hacer una previsión, comprobar si el resultado es el mismo o no, y en tal caso investigar por qué o al menos explicar qué sucede.	Comportamiento del cuadrado de la suma de dos números. Si interesa puede hacerse extensivo al cubo de la suma de dos números.

Primero escribiremos la operación que queremos hacer**:** $\mathbf{(2 + 3)^2}$

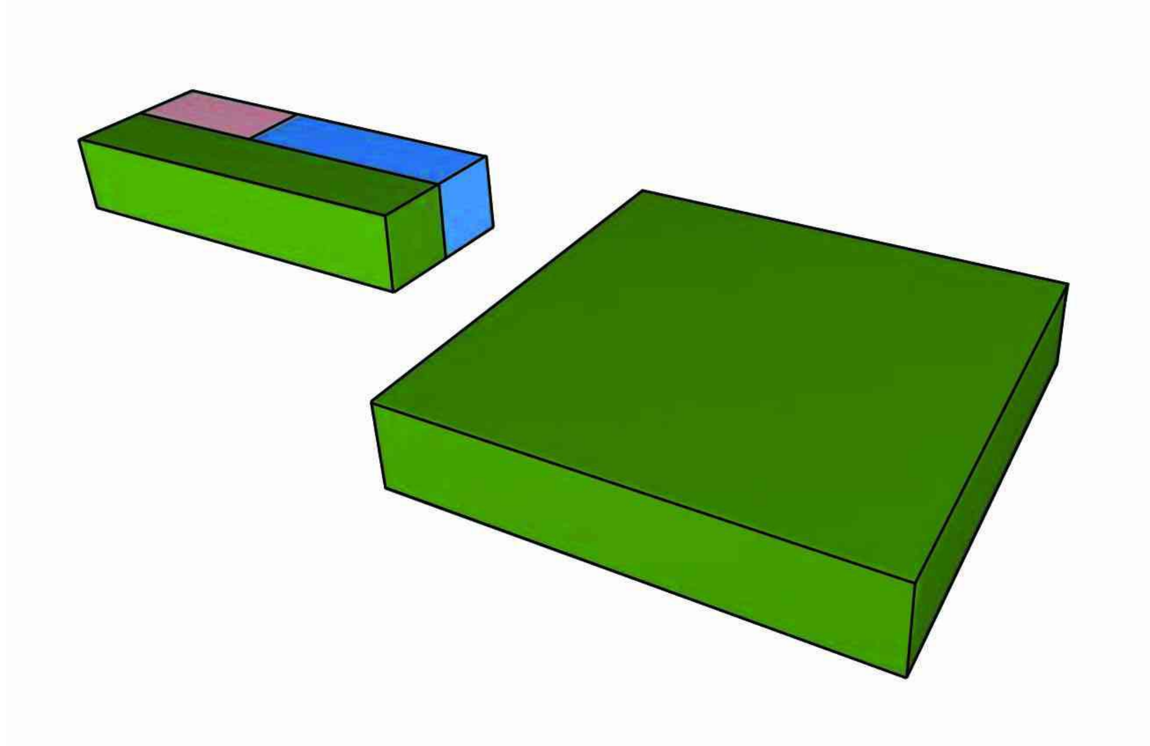
Organizaremos a los alumnos en dos grupos, y diremos:

Vosotros hacéis con las regletas, primero la suma y después el cuadrado de su resultado.
Vosotros hacéis el cuadrado de cada uno de los sumandos, y después los sumáis.

¿Creéis que ambos grupos obtendréis el mismo resultado final?.. ...

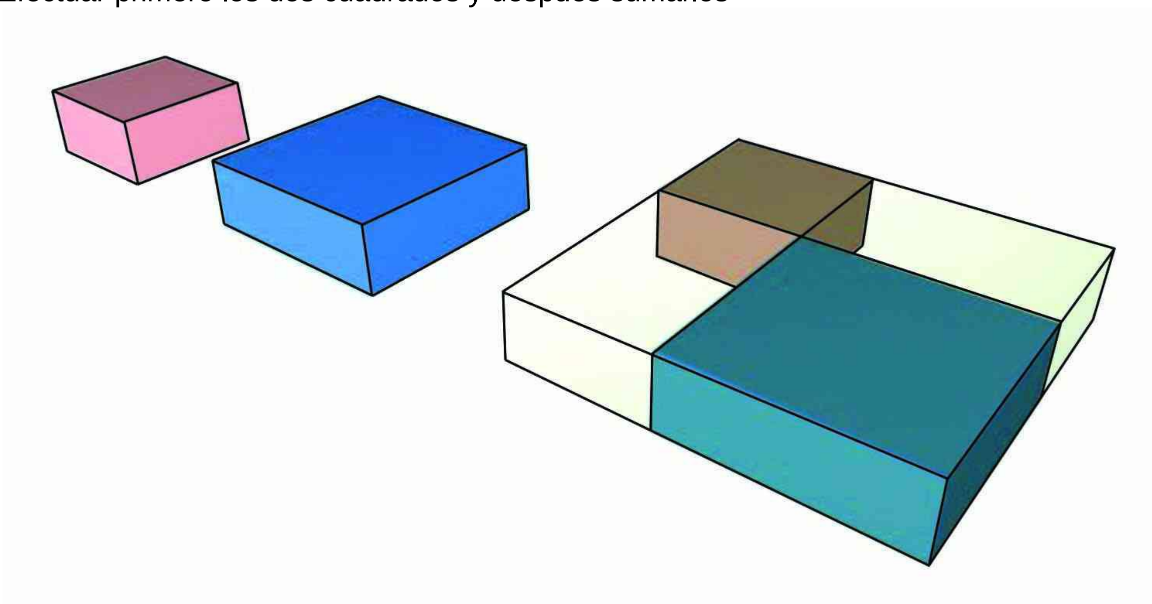
La mayoría de los alumnos dicen que sí, probablemente por analogía con el caso de la multiplicación por una suma, que ya han trabajado.
Después de esta primera estimación del resultado, les pedimos que lo comprueben.
Las dos maneras propuestas son:

Efectuar primero la suma y después hacer el cuadrado



2 + 3 = 5 52

Efectuar primero los dos cuadrados y después sumarlos



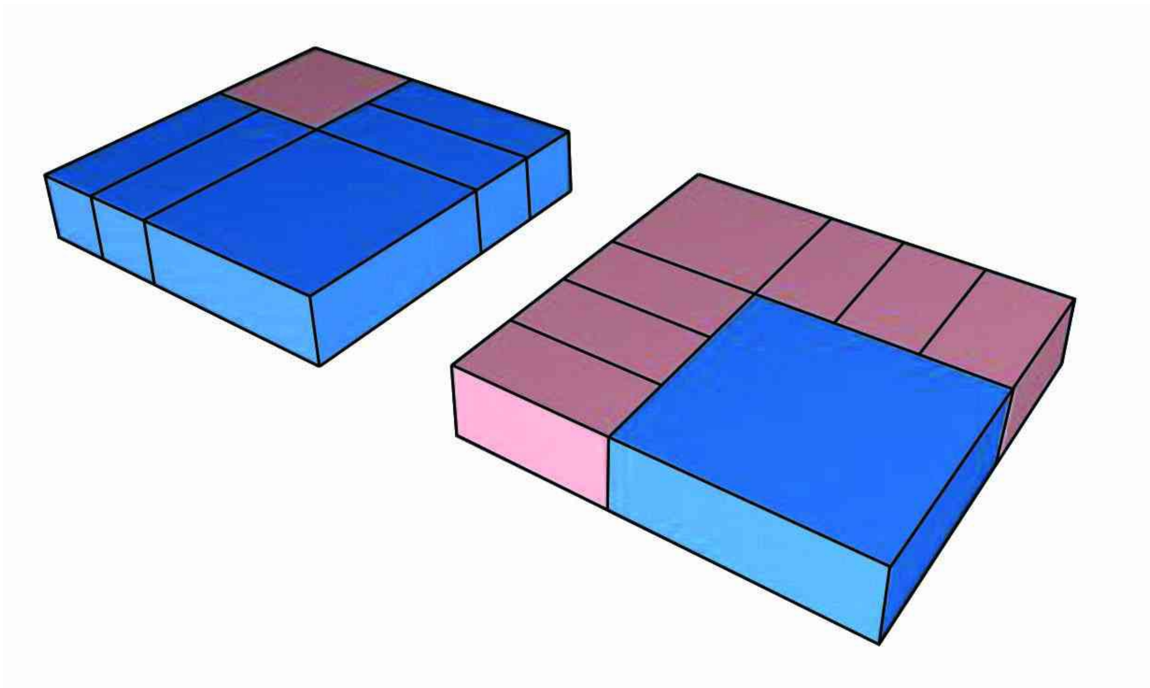
22 32 22 + 32

Los chicos y chicas ven que el cuadrado de 2 más el cuadrado de 3 no llegan a rellenar el cuadrado de 5, por lo tanto, lo primero que constatan, y que estará bien que escriban es lo siguiente:

$2^2 + 3^2 \neq 5^2$

Eso incluso lo ven y comprenden a Ciclo Medio, sin ninguna dificultad.

Ahora que son mayores, podemos intentar que encuentren qué es lo que falta para completar el cuadrado de la suma, o sea el cuadrado de 5.



Faltan precisamente dos productos de 3 X 2 o bien de 2 X 3, o sea que podemos expresarlo escribiendo 2 X 3 X 2.

Ahora se debe escribir todo cuanto hemos hecho y encontrado con lenguaje matemático:

52 = 22 + 32 + 2 X 3 X 2 y finalmente $(2 + 3)^2$ = 22 + 32 + 2 X 3 X 2

Una serie de otros casos concretos como éste será la preparación necesaria para la fórmula algebraica que estudiarán de mayores.

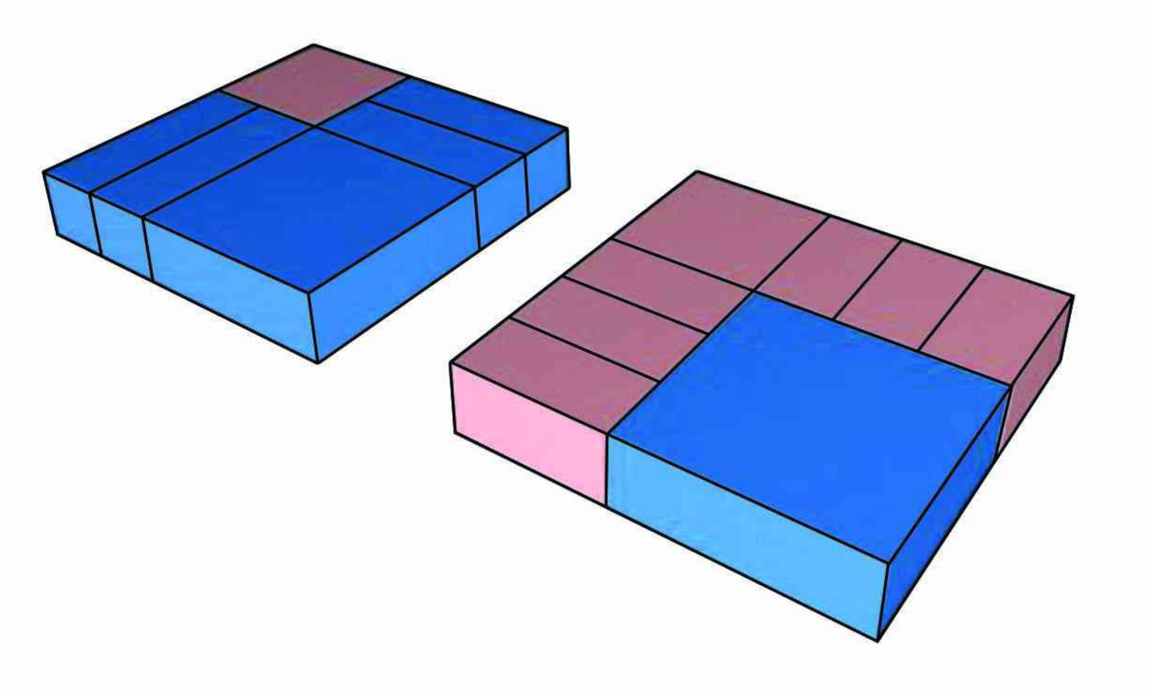
Ejemplo 12. Las ecuaciones

99. Representar con las regletas situaciones numéricas y problemas con datos desconocidos. Pasar a su expresión escrita en forma de ecuación y discutir esta escritura a la vista del material.	Comprensión del significado real de una ecuación escrita, y de los valores representados por las letras. Introducción al lenguaje del álgebra.

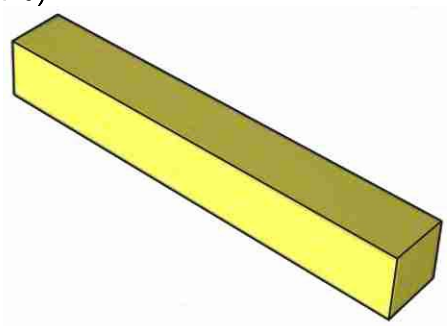
El maestro propone a los alumnos:

Tenemos que encontrar una regleta que repitiéndola tres veces y sumándole 4 nos dé 25.
No sabemos cuál es, pero ya la encontraremos. ¡Y no vale a contarlo antes!
Representadlo con las regletas, encima de un papel, dejando un espacio en blanco allí donde tenemos que repetir tres veces la regleta que no sabemos cuál es.

Pronto llegarán a la representación. Pondremos puntos suspensivos al espacio vacío



Entonces, viendo la longitud que corresponde a las tres regletas iguales (que en nuestro caso es 21) fácilmente adivinarán la solución.
La solución, recordémoslo, en esta actividad es una regleta
(la regleta del 7, color amarillo)



En este tipo de actividad es indispensable exigir siempre la comprobación para poder estar seguros de que el resultado es bueno.

Recordemos que el objetivo de esta actividad no es encontrar un valor numérico o resultado, sino razonar para encontrar una manera correcta de plantear una ecuación y comprender el significado de la letra x al hacerlo.

Ahora ya hemos encontrado la regleta desconocida, y sabemos que vale 7. Vosotros ya sabéis escribir toda la operación que vemos con las regletas, tal y como hacéis siempre.
Pero ahora planteémonos otro problema;
*¿Cómo lo podríamos hacer para escribir toda la operación**, con el signo "igual"**, antes de saber cuanto vale aquella regleta?*

Y dejamos que ellos inventen maneras. Seguro que sale la de poner un dibujo o un signo en el lugar de la regleta.

Pues, ¡muy bien! ¡Hemos encontrado el mismo truco que los matemáticos!. Ellos han decidido que le pondremos siempre una misma letra que es la ***X*** *y así, como la gente de todo el mundo hacemos lo mismo, sólo al verlo escrito ya entendemos y sabemos que significa que es una cantidad que tenemos que descubrir.*

Escribimos nuestra ecuación indicándoles que a partir de ahora, para no equivocarnos con la letra X, utilizaremos un puntito como signo de multiplicar.

$$\mathbf{3 \cdot X + 4 = 21}$$

Es muy importante que la primera ecuación de su vida no sea algo que se les dé escrito para resolver, sin saber exactamente qué significado tiene esta escritura, sino que sea una manera que ellos mismos han llegado a encontrar, de escribir algo en función de un significado previamente conocido.